01 - Summen, Produkte & Brüche

Vorkurs Mathematik SoSe 2022

Lukas Mürmann

Fakultät Informatik - Lehrstuhl 7 - TU Dortmund

07.03.2022

Summen und Produkte

Abkürzende Schreibweisen f. Summe und Produkt

- Bsp. Summe:

$$\sum_{k=1}^{5} k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

- Bsp. Produkt:

$$\prod_{k=1}^{5} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$$

- Warum machen wir das?
- Die 5 Zahlen können wir auch ohne abkürzende Schreibweise addieren bzw. multiplizieren.
- Wie gehen wir bei 1000 oder sogar unendlich viele Zahlen vor?

Abkürzende Schreibweisen f. Summe und Produkt

- Abkürzende Schreibweise:

$$\sum_{k=1}^{100} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100$$

$$\prod_{k=1}^{1000} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 999 \cdot 1000$$

- Später in Mafi 2:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$$

$\rightarrow$ Reihen mit unendlich vielen Summanden

Definition abk. Schreibweisen Summe u. Produkt

Definition 1.1

Allgemein schreibt man das für Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ dann so:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_{n-1} + a_n\,,$$

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \cdot a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot + a_n$$

Wobei gilt, dass $n, m \in \mathbb{Z}$ und $m \leq n$ ist.

- k nennt man dabei den **Laufindex** bzw. die **Laufvariable** der Summe bzw. des Produkts.
- m wäre hier der **Startwert** und n der **Endwert**.
- a_k wird als Funktion bzgl. der Laufvariablen k bezeichnet.

Beispiele

- **Beispiel 1:**

$$\sum_{j=-2}^{3} j^2 = (-2)^2+(-1)^2+0^2+1^2+2^2+3^2 = 4+1+0+1+4+9 = 19$$

Hier ist nun der Laufindex j mit Startwert -2 und Endwert 3.

- **Beispiel 2:**

$$\prod_{i=3}^{5} (2i-2) = (3\cdot 2-2)\cdot(4\cdot 2-2)\cdot(5\cdot 2-2)$$

$$= (6-2)\cdot(8-2)\cdot(10-2) = 4\cdot 6\cdot 8 = 192$$

Hier ist der Laufindex i mit Startwert 3 und Endwert 5.

Problemfall

- Der Laufindex k kann also bei einer beliebigen Zahl aus $\mathbb{Z}$ anfangen...
- Was passiert, wenn der Endwert kleiner als der Startwert ist?
  - In diesem Fall summiert bzw. multipliziert man quasi gar nicht los.
  - Wir erhalten somit eine **leere Summe** bzw. ein **leeres Produkt**.
  - Diese sind nach Definition gleich 0 (Summe) bzw. gleich 1 (Produkt).
  - **Denn:**

    $\rightarrow$ Addition mit 0 lässt Summe unverändert.

    $\rightarrow$ Multiplikation mit 1 lässt Produkt unverändert.

Definition abk. Schreibweisen Summe u. Produkt

Definition 1.1 (Fortsetzung)

Für Zahlen $a_1, ..., a_n$ mit $n, m \in \mathbb{Z}$ und $m > n$ gilt:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = 1 \quad \text{bzw.} \quad \prod_{k=m}^{n} a_k = 0$$

Rechenregel 1

Regel 1: Faktoren in die Summe ziehen

$$a \cdot \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n} (a \cdot a_k)$$

Beispiel:

$$4 \cdot \sum_{k=1}^{4} k = 4 \cdot (1+2+3+4) = 4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = \sum_{k=1}^{4} 4 \cdot k$$

$$\Rightarrow 4 \cdot \sum_{k=1}^{4} k = \sum_{k=1}^{4} 4 \cdot k$$

Rechenregel 2

Regel 2: Addition von Summen gleicher Länge

Falls Laufindex sowie Start- und Endwert zweier Summen gleich sind gilt:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k = \sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k)$$

Beispiel:

$$\sum_{k=1}^{4} k + \sum_{k=1}^{4} 2k = (1+2+3+4) + (2\cdot 1 + 2\cdot 2 + 2\cdot 3 + 2\cdot 4)$$

$$= (1+2\cdot 1)+(2+2\cdot 2)+(3+2\cdot 3)+(4+2\cdot 4) = \sum_{k=1}^{4} (k+2k) = \sum_{k=1}^{4} 3k$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{4} k + \sum_{k=1}^{4} 2k = \sum_{k=1}^{4} 3k$$

Index-Transformation

Ein wichtiges Werkzeug im Umgang mit den Summen- und Produktschreibweisen stellt die sog. **Index-Transformation** bzw. **Umindizierung** dar. Dazu zunächst ein einfaches Beispiel:

$$\sum_{k=1}^{5} k = 1+2+3+4+5 = \sum_{j=2}^{6} (j-1)$$

Prüfung auf Gleichheit:

$$\sum_{j=2}^{6} (j-1) = (2-1)+(3-1)+(4-1)+(5-1)+(6-1)$$

$$= 1+2+3+4+5$$

$\checkmark$

Index-Transformation (Fortsetzung)

$$\sum_{k=1}^{5} k = \sum_{j=2}^{6} (j-1)$$

- In der zweiten Summe haben wir das k sozusagen durch $j-1$ substituiert:

  $\rightarrow$ $k = j - 1$

  $\rightarrow$ Umgestellt nach j: $j = k + 1$

- Start- und Endwert ändern sich entsprechend:

  $\rightarrow$ Startwert: $k = 1 \Rightarrow j = k + 1 = 1 + 1 = 2$

  $\rightarrow$ Endwert: $k = 5 \Rightarrow j = k + 1 = 5 + 1 = 6$

Index-Transformation (Regel)

Regel 3: Index-Transformation bzw. Umindizierung

Sei x eine beliebige ganze Zahl. Dann gilt:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{j=m+x}^{n+x} a_{j-x}$$

$\rightarrow$ Das heißt, man kann die Grenzen einer Summe ändern, indem man den ursprünglichen Summationsindex *substituiert*.

Aufgaben

Finden Sie jeweils zwei verschiedene Summenschreibweisen für die folgenden Ausdrücke:

$$2+4+6+8+10, \qquad 1+9+25+49, \qquad 2-3+4-5+6$$

Antworten:

$$2+4+6+8+10 = \sum_{k=1}^{5} 2k \overset{k=j+1}{=} \sum_{j=0}^{4} 2(j+1)$$

$$1+9+25+49 = \sum_{k=0}^{3} (2k+1)^2 \overset{k=j-1}{=} \sum_{j=1}^{4} (2j-1)^2$$

$$2-3+4-5+6 = \sum_{k=2}^{6} (-1)^k k \overset{k=j+1}{=} \sum_{j=1}^{5} (-1)^{j+1}(j+1)$$

Aufgabe

Vereinfachen und berechnen Sie anschließend die Summe:

$$3 \cdot \sum_{k=0}^{3}(k^2 + \frac{7}{3}k) + \sum_{j=1}^{4}(-7j + 8) = ?$$

Zusammenfassung und Ausblick

- Kompakte Darstellung von komplexen Summen und Produkten durch abkürzende Schreibweisen
- Veränderung von Summengrenzen durch Index-Transformation
- Weitere Vereinfachungen in Kombination mit den Rechenregeln
- Weitere Möglichkeiten mit den abkürzenden Schreibweisen zu arbeiten:

$$\text{Doppelsummen: } \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_k b_j$$

$$\text{Reihen: } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$$

Bruchrechnung

Motivation

- Mathe-Klausuren wie HöMa oder MafI 2 haben oft hohe Durchfallquoten.
- Teilweise aufgrund fehlender Kenntnisse in den Grundrechenarten:
  - Potenzrechnung
  - Bruchrechnung
  - etc.

$\rightarrow$ Daher wiederholen wir heute Bruchrechnung von Grund auf.

Rationale Zahlen

- Schauen wir uns mal Elemente aus der Menge der rationalen Zahlen ($\mathbb{Q}$) an.
- Zum Beispiel:

$$\frac{3}{4} \in \mathbb{Q}$$

- So ein Element nennt man **Bruch**.
- Jeder Bruch besteht aus einem Zähler (oben) und einem Nenner (unten).
- Die Zahlen im Zähler und Nenner sind hierbei immer ganze bzw. natürliche Zahlen.
- 0 ist natürlich im Nenner nicht erlaubt.

Beispiele

- Schauen wir uns mal die folgenden Brüche an:

$$\frac{3}{4} \qquad \frac{15}{20} \qquad \frac{9}{12} \qquad \frac{30}{40}$$

- Was fällt auf? Man kann die Brüche umschreiben:

$$\frac{1\cdot 3}{1\cdot 4} \qquad \frac{5\cdot 3}{5\cdot 4} \qquad \frac{3\cdot 3}{3\cdot 4} \qquad \frac{10\cdot 3}{10\cdot 4}$$

- Im Zähler und Nenner ist jeweils ein Faktor gleich.

→ Man kann diesen kürzen.

→ Anschließend steht dort immer noch der gleiche Bruch.

- Im Endeffekt hatten wir also vier Mal **dieselbe Zahl:**

$$\frac{3}{4} = \frac{15}{20} = \frac{9}{12} = \frac{30}{40}$$

Definition

Definition 1.2 Kürzen und Erweitern

Seien $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}, k \in \mathbb{Z}$ mit $k \neq 0$, dann gilt.

$$\frac{a}{b} = \frac{k \cdot a}{k \cdot b}$$

- Von links nach rechts gelesen $\rightarrow$ Der Bruch wird mit dem Faktor k **erweitert**.
- Von rechts nach links gelesen $\rightarrow$ Der Bruch wird um dem Faktor k **gekürzt**.
- **Wichtig:** Wir dürfen nur kürzen, weil oben und unten jeweils Produkte stehen.
- Bei Summen bzw. Differenzen im Zähler oder Nenner müssen wir zum Kürzen erst **Ausklammern**.
- Dabei muss natürlich *jeder* Summand den Faktor k enthalten.

Ausklammern

- Schauen wir uns mal als Beispiel folgenden Bruch an:

$$\frac{3+6}{9+15} = \frac{3 \cdot (1+2)}{3 \cdot (3+5)} = \frac{1+2}{3+5} = \frac{3}{8}$$

- Der Faktor 3 war in allen Summanden des Bruchs enthalten.
- Daher konnten wir ihn im Zähler **und** Nenner **ausklammern** und anschließend kürzen.

Negative Brüche

- Schauen wir uns nun Brüche mit negativen Zahlen im Zähler bzw. im Nenner an.
- Es gelten dann durch Kürzen und Erweitern mit (-1) folgende Gleichheiten:

$$\frac{-2}{5} = \frac{(-1)\cdot(-1)}{(-1)\cdot 5} = \frac{2}{-5}, \qquad \frac{3}{-2} = \frac{(-1)\cdot 3}{(-1)\cdot(-2)} = \frac{-3}{2}$$

$\rightarrow$ Hier haben wir jeweils mit (-1) erweitert.

$$\frac{-4}{-7} = \frac{(-1)\cdot 4}{(-1)\cdot 7} = \frac{4}{7}$$

$\rightarrow$ Hier haben wir (-1) ausgeklammert und anschließend gekürzt.

Negative Brüche (Definition)

Definition 1.3 Negative Brüche

Für $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} \quad und \quad \frac{a}{b} = \frac{-a}{-b} = -\frac{-a}{b} = -\frac{a}{-b}$$

Addieren und Subtrahieren

- Nächster Schritt: Wir möchten zwei **Brüche addieren bzw. subtrahieren**
- Schauen wir uns dafür zunächst folgende Brüche an:

$$\frac{5}{6} \qquad\qquad \frac{4}{9}$$

- Wie können wir diese beiden Brüche addieren bzw. subtrahieren?
- Zähler und Nenner dürfen wir <u>nicht</u> getrennt voneinander addieren bzw. subtrahieren.
- Wir benötigen dazu einen sogenannten **Hauptnenner**!
- D.h. wir müssen die Brüche so erweitern bzw. kürzen, dass sie anschließend den gleichen Nenner besitzen.

Hauptnenner finden ($\frac{5}{6}$ und $\frac{4}{9}$)

- Der kleinste Hauptnenner entspricht dem **kleinsten gemeinsamen Vielfachen (kgV)** der beiden Nenner.
- In unserem Fall enspricht das kgV von 6 und 9, also der beiden Nenner, 18.
- Wir bringen also nun beide Brüche durch Erweitern auf den Hauptnenner 18:

$$\frac{5}{6} = \frac{3 \cdot 5}{3 \cdot 6} = \frac{15}{18} \qquad \frac{4}{9} = \frac{2 \cdot 4}{2 \cdot 9} = \frac{8}{18}$$

- Nun können wir die beiden Brüche einfach addieren bzw. subtrahieren, indem wir die Zähler addieren bzw. subtrahieren:

$$\frac{15}{18} + \frac{8}{18} = \frac{15+8}{18} = \frac{23}{18} \quad \text{bzw.} \quad \frac{15}{18} - \frac{8}{18} = \frac{15-8}{18} = \frac{7}{18}$$

Hauptnenner finden (Fortsetzung)

- Lässt sich das kgV nicht schnell erkennen gibt es folgende Methode:
  - Wir erweitern einfach jeweils mit dem Nenner des anderen Bruchs und umgekehrt.
  - Nach der Addition bzw. Subtraktion muss meist noch gekürzt werden.
  - Funktioniert immer!
- Einmal an unserem Beispiel veranschaulicht:

$$\frac{5}{6}+\frac{4}{9}=\frac{9\cdot 5}{9\cdot 6}+\frac{6\cdot 4}{6\cdot 9}=\frac{45}{54}+\frac{24}{54}=\frac{45+24}{54}=\frac{69}{54}=\frac{3\cdot 23}{3\cdot 18}=\frac{23}{18}$$

$$\frac{5}{6}-\frac{4}{9}=\frac{9\cdot 5}{9\cdot 6}-\frac{6\cdot 4}{6\cdot 9}=\frac{45}{54}-\frac{24}{54}=\frac{45-24}{54}=\frac{21}{54}=\frac{3\cdot 7}{3\cdot 18}=\frac{7}{18}$$

Addition und Subtraktion (Definition)

Allgemein lässt sich also Folgendes definieren:

Definition 1.4 Addition und Subtraktion

Seien $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2} \in \mathbb{Q}$, dann gilt für die Addition bzw. Subtraktion dieser Brüche:

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 \cdot b_2}{b_1 \cdot b_2} + \frac{a_2 \cdot b_1}{b_2 \cdot b_1} = \frac{a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1}{b_1 \cdot b_2}$$

bzw.

$$\frac{a_1}{b_1} - \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 \cdot b_2}{b_1 \cdot b_2} - \frac{a_2 \cdot b_1}{b_2 \cdot b_1} = \frac{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1}{b_1 \cdot b_2}$$

Aufgaben

Berechnen Sie die folgenden Terme:

$$\frac{5}{7} + \frac{3}{4} = ?$$

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{4} = ?$$

$$\frac{-3}{2} + \frac{3}{-4} = ?$$

$$\frac{2}{112} - \frac{3}{336} = ?$$

Multiplikation

- Die **Multiplikation von Brüchen** ist weniger umständlich als die Addition bzw. Subtraktion.
- Schauen wir uns dafür wieder folgende Brüche an:

$$\frac{5}{6} \qquad \frac{4}{9}$$

- Wir benötigen für die Multiplikation keinen gemeinsamen Teiler.
- Man multipliziert einfach beide Zähler und beide Nenner miteinander und kürzt wenn möglich:

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{4}{9} = \frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 9} = \frac{20}{54} = \frac{2 \cdot 10}{2 \cdot 27} = \frac{10}{27}$$

Division

- Bei der **Division von Brüchen** nutzen wir einen kleinen Trick.
- Schauen wir uns dafür einen Bruch an und schreiben ihn ein wenig um:

$$5 \div 6 = \frac{5}{6} = \frac{5}{1} \cdot \frac{1}{6} = 5 \cdot \frac{1}{6}$$

- Anstatt zu dividieren kann man auch mit dem **Kehrwert multiplizieren**!
- Beispiel mit zwei Brüchen:

$$\frac{5}{6} \div \frac{4}{9} = \frac{5}{6} \cdot \frac{9}{4} = \frac{45}{24} \quad \left(= \frac{3 \cdot 15}{3 \cdot 8} = \frac{15}{8} \right)$$

Multiplikation und Division (Definition)

Allgemein lässt sich also Folgendes für die Multiplikation und Division von Brüchen definieren:

Definition 1.5 Multiplikation

Seien $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2} \in \mathbb{Q}$, dann gilt für die Multiplikation dieser Brüche:

$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 \cdot a_2}{b_1 \cdot b_2}$$

Definition 1.6 Division

Seien $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2} \in \mathbb{Q}$ und $b_1, b_2 \neq 0$ dann gilt für die Division dieser Brüche:

$$\frac{a_1}{b_1} \div \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{b_2}{a_2} = \frac{a_1 \cdot b_2}{b_1 \cdot a_2}$$

Aufgaben

Berechnen Sie die folgenden Terme:

$$\frac{5}{7} \cdot \frac{3}{4} = ?$$

$$\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} = ?$$

$$\frac{-3}{2} \cdot \frac{3}{-4} = ?$$

$$\frac{2}{112} \div \frac{3}{336} = ?$$

Weitere Rechenregeln

- Manchmal muss man Brüche etwas umschreiben, bevor man mit ihnen weiterrechnen kann:

Regel 1: Multiplikation mit 1 verändert den Bruch nicht

Beispiel:

$$\frac{5}{2} = \frac{5}{2} \cdot 1 = \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{7} = \frac{35}{14}$$

$\rightarrow$ Mit einer 1 multiplizieren ist dasselbe wie Erweitern mit einer beliebigen Zahl (hier 7).

Regel 2: Ein Bruch verändert sich bei einer Addition mit 0 nicht

Beispiel:

$$\frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} + \frac{-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$$

$\rightarrow$ Kann Brüche in gewissen Situationen vereinfachen.

Beispielaufgaben

Konstruieren Sie jeweils einen Bruch aus folgenden Zahlen:

a) $1,573$ b) $3,86424$

Zu a): Hinter dem Komma sind **drei** Stellen $\rightarrow$ wir erweitern mit 1000:

$$1,573 = \frac{1,573 \cdot 1000}{1000} = \frac{1573}{1000}$$

$$3,86424 = ?$$

Perioden und Brüche

- Dezimalzahlen mit Perioden lassen sich meist ohne großen Aufwand als Bruch darstellen.
- Ein Aufteilen der jeweiligen Zahl ist dabei oft erforderlich:
- **Beispiele:**

$$2,\overline{3} = 2 + 0,\overline{3} = 2 + \frac{3}{9} = \frac{18}{9} + \frac{3}{9} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$$

- Bei der Zahl **mit** der Periode mit **einer** Stelle, haben wir im Bruch im Nenner **eine** Neun geschrieben.
- Bei einer Zahl mit einer Periode mit **zwei Stellen** schreiben wir im Nenner **zwei** Neunen:

$$3,\overline{34} = 3 + 0,\overline{34} = 3 + \frac{34}{99} = \frac{297}{99} + \frac{34}{99} = \frac{331}{99}$$

Zusammenfassung und Ausblick

- Ein Bruch hat unendlich viele Darstellungsweisen (Kürzen, Erweitern)
- Addition und Subtraktion nur mit gleichem Hauptnenner
  - Kleinstes gemeinsames Vielfaches (kgV) suchen!
- Multiplikation durch jeweilige Multiplikation der Nenner und Zähler
- Division durch Multiplikation mit dem Kehrwert
- In MafI 2 werdet ihr häufig mit Brüchen außerhalb der rationalen Zahlen arbeiten:
  - $\frac{\sqrt{3}}{2} \notin \mathbb{Q}$

Quellen und Literatur

[1] Akad. Dir. Dr. Martin Scheer, Maximilian Sperber
„Mathematischer Vorkurs“.
TU Dortmund 2021.