

01 - Summen, Produkte & Brüche

Vorkurs Mathematik SoSe 2022

Lukas Mürmann

Fakultät Informatik - Lehrstuhl 7 - TU Dortmund

07.03.2022

Summen und Produkte

1 / 38

2 / 38

Abkürzende Schreibweisen f. Summe und Produkt

Abkürzende Schreibweisen f. Summe und Produkt

- Bsp. Summe:

$$\sum_{k=1}^5 k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

- Bsp. Produkt:

$$\prod_{k=1}^5 k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$$

- Warum machen wir das?
- Die 5 Zahlen können wir auch ohne abkürzende Schreibweise addieren bzw. multiplizieren.
- Wie gehen wir bei 1000 oder sogar unendlich viele Zahlen vor?

- Abkürzende Schreibweise:

$$\sum_{k=1}^{100} k = 1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100$$

$$\prod_{k=1}^{1000} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 999 \cdot 1000$$

- Später in Mafi 2:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

→ Reihen mit unendlich vielen Summanden

Definition abk. Schreibweisen Summe u. Produkt

Beispiele

Definition 1.1

Allgemein schreibt man das für Zahlen a_1, \dots, a_n dann so:

$$\sum_{k=m}^n a_k = a_m + a_{m+1} + \dots + a_{n-1} + a_n,$$

$$\prod_{k=m}^n a_k = a_m \cdot a_{m+1} \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

Wobei gilt, dass $n, m \in \mathbb{Z}$ und $m \leq n$ ist.

- k nennt man dabei den **Laufindex** bzw. die **Laufvariable** der Summe bzw. des Produkts.
- m wäre hier der **Startwert** und n der **Endwert**.
- a_k wird als Funktion bzgl. der Laufvariablen k bezeichnet.

5 / 38

• Beispiel 1:

$$\sum_{j=-2}^3 j^2 = (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 4 + 1 + 0 + 1 + 4 + 9 = 19$$

Hier ist nun der Laufindex j mit Startwert -2 und Endwert 3.

• Beispiel 2:

$$\prod_{i=3}^5 (2i - 2) = (3 \cdot 2 - 2) \cdot (4 \cdot 2 - 2) \cdot (5 \cdot 2 - 2)$$

$$= (6 - 2) \cdot (8 - 2) \cdot (10 - 2) = 4 \cdot 6 \cdot 8 = 192$$

Hier ist der Laufindex i mit Startwert 3 und Endwert 5.

6 / 38

Problemfall

Definition abk. Schreibweisen Summe u. Produkt

- Der Laufindex k kann also bei einer beliebigen Zahl aus \mathbb{Z} anfangen...
- Was passiert, wenn der Endwert kleiner als der Startwert ist?
 - ▶ In diesem Fall summiert bzw. multipliziert man quasi gar nicht los.
 - ▶ Wir erhalten somit eine **leere Summe** bzw. ein **leeres Produkt**.
 - ▶ Diese sind nach Definition gleich 0 (Summe) bzw. gleich 1 (Produkt).
 - ▶ **Denn:**
 - Addition mit 0 lässt Summe unverändert.
 - Multiplikation mit 1 lässt Produkt unverändert.

Definition 1.1 (Fortsetzung)

Für Zahlen a_1, \dots, a_n mit $n, m \in \mathbb{Z}$ und $m > n$ gilt:

$$\sum_{k=m}^n a_k = 1 \quad \text{bzw.} \quad \prod_{k=m}^n a_k = 0$$

7 / 38

8 / 38

Rechenregel 1

Regel 1: Faktoren in die Summe ziehen

$$a \cdot \sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m}^n (a \cdot a_k)$$

Beispiel:

$$4 \cdot \sum_{k=1}^4 k = 4 \cdot (1 + 2 + 3 + 4) = 4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = \sum_{k=1}^4 4 \cdot k$$

$$\Rightarrow 4 \cdot \sum_{k=1}^4 k = \sum_{k=1}^4 4 \cdot k$$

9 / 38

Rechenregel 2

Regel 2: Addition von Summen gleicher Länge

Falls Laufindex sowie Start- und Endwert zweier Summen gleich sind gilt:

$$\sum_{k=m}^n a_k + \sum_{k=m}^n b_k = \sum_{k=m}^n (a_k + b_k)$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^4 k + \sum_{k=1}^4 2k &= (1 + 2 + 3 + 4) + (2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4) \\ &= (1+2 \cdot 1) + (2+2 \cdot 2) + (3+2 \cdot 3) + (4+2 \cdot 4) = \sum_{k=1}^4 (k + 2k) = \sum_{k=1}^4 3k \\ &\Rightarrow \sum_{k=1}^4 k + \sum_{k=1}^4 2k = \sum_{k=1}^4 3k \end{aligned}$$

10 / 38

Index-Transformation

Ein wichtiges Werkzeug im Umgang mit den Summen- und Produktschreibweisen stellt die sog. **Index-Transformation** bzw. **Umindizierung** dar. Dazu zunächst ein einfaches Beispiel:

$$\sum_{k=1}^5 k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \sum_{j=2}^6 (j - 1)$$

Prüfung auf Gleichheit:

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^6 (j - 1) &= (2 - 1) + (3 - 1) + (4 - 1) + (5 - 1) + (6 - 1) \\ &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \end{aligned}$$

✓

11 / 38

Index-Transformation (Fortsetzung)

$$\sum_{k=1}^5 k = \sum_{j=2}^6 (j - 1)$$

- In der zweiten Summe haben wir das k sozusagen durch $j - 1$ substituiert:
 - $k = j - 1$
 - Umgestellt nach j : $j = k + 1$
- Start- und Endwert ändern sich entsprechend:
 - Startwert: $k = 1 \Rightarrow j = k + 1 = 1 + 1 = 2$
 - Endwert: $k = 5 \Rightarrow j = k + 1 = 5 + 1 = 6$

12 / 38

Index-Transformation (Regel)

Aufgaben

Regel 3: Index-Transformation bzw. Umindizierung

Sei x eine beliebige ganze Zahl. Dann gilt:

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{j=m+x}^{n+x} a_{j-x}$$

→ Das heißt, man kann die Grenzen einer Summe ändern, indem man den ursprünglichen Summationsindex *substituiert*.

Finden Sie jeweils zwei verschiedene Summenschreibweisen für die folgenden Ausdrücke:

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10, \quad 1 + 9 + 25 + 49, \quad 2 - 3 + 4 - 5 + 6$$

Antworten:

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 = \sum_{k=1}^5 2k \stackrel{k=j+1}{=} \sum_{j=0}^4 2(j+1)$$

$$1 + 9 + 25 + 49 = \sum_{k=0}^3 (2k+1)^2 \stackrel{k=j-1}{=} \sum_{j=1}^4 (2j-1)^2$$

$$2 - 3 + 4 - 5 + 6 = \sum_{k=2}^6 (-1)^k k \stackrel{k=j+1}{=} \sum_{j=1}^5 (-1)^{j+1} (j+1)$$

13 / 38

14 / 38

Aufgabe

Zusammenfassung und Ausblick

Vereinfachen und berechnen Sie anschließend die Summe:

$$3 \cdot \sum_{k=0}^3 (k^2 + \frac{7}{3}k) + \sum_{j=1}^4 (-7j + 8) = ?$$

- Kompakte Darstellung von komplexen Summen und Produkten durch abkürzende Schreibweisen
- Veränderung von Summengrenzen durch Index-Transformation
- Weitere Vereinfachungen in Kombination mit den Rechenregeln
- Weitere Möglichkeiten mit den abkürzenden Schreibweisen zu arbeiten:

Doppelsummen: $\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_k b_j$

Reihen: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$

15 / 38

16 / 38

Motivation

Bruchrechnung

- Mathe-Klausuren wie HöMa oder Mafl 2 haben oft hohe Durchfallquoten.
 - Teilweise aufgrund fehlender Kenntnisse in den Grundrechenarten:
 - ▶ Potenzrechnung
 - ▶ Bruchrechnung
 - ▶ etc.
- Daher wiederholen wir heute Bruchrechnung von Grund auf.

17 / 38

18 / 38

Rationale Zahlen

- Schauen wir uns mal Elemente aus der Menge der rationalen Zahlen (\mathbb{Q}) an.
- Zum Beispiel:

$$\frac{3}{4} \in \mathbb{Q}$$

- So ein Element nennt man **Bruch**.
- Jeder Bruch besteht aus einem **Zähler** (oben) und einem **Nenner** (unten).
- Die Zahlen im Zähler und Nenner sind hierbei immer ganze bzw. natürliche Zahlen.
- 0 ist natürlich im Nenner nicht erlaubt.

19 / 38

Beispiele

- Schauen wir uns mal die folgenden Brüche an:

$$\frac{3}{4} \quad \frac{15}{20} \quad \frac{9}{12} \quad \frac{30}{40}$$

- Was fällt auf? Man kann die Brüche umschreiben:

$$\frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 4} \quad \frac{5 \cdot 3}{5 \cdot 4} \quad \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 4} \quad \frac{10 \cdot 3}{10 \cdot 4}$$

- Im Zähler und Nenner ist jeweils ein Faktor gleich.
- Man kann diesen kürzen.
- Anschließend steht dort immer noch der gleiche Bruch.
- Im Endeffekt hatten wir also vier Mal **dieselbe Zahl**:

$$\frac{3}{4} = \frac{15}{20} = \frac{9}{12} = \frac{30}{40}$$

20 / 38

Definition

Ausklammern

Definition 1.2 Kürzen und Erweitern

Seien $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \neq 0$, dann gilt.

$$\frac{a}{b} = \frac{k \cdot a}{k \cdot b}$$

- Von links nach rechts gelesen \rightarrow Der Bruch wird mit dem Faktor k **erweitert**.
- Von rechts nach links gelesen \rightarrow Der Bruch wird um dem Faktor k **gekürzt**.
- **Wichtig:** Wir dürfen nur kürzen, weil oben und unten jeweils Produkte stehen.
- Bei Summen bzw. Differenzen im Zähler oder Nenner müssen wir zum Kürzen erst **Ausklammern**.
- Dabei muss natürlich *jeder* Summand den Faktor k enthalten.

21 / 38

- Schauen wir uns mal als Beispiel folgenden Bruch an:

$$\frac{3+6}{9+15} = \frac{3 \cdot (1+2)}{3 \cdot (3+5)} = \frac{1+2}{3+5} = \frac{3}{8}$$

- Der Faktor 3 war in allen Summanden des Bruchs enthalten.
- Daher konnten wir ihn im Zähler **und** Nenner **ausklammern** und anschließend kürzen.

22 / 38

Negative Brüche

Negative Brüche (Definition)

- Schauen wir uns nun Brüche mit negativen Zahlen im Zähler bzw. im Nenner an.
- Es gelten dann durch Kürzen und Erweitern mit (-1) folgende Gleichheiten:

$$\frac{-2}{5} = \frac{(-1) \cdot (-1)}{(-1) \cdot 5} = \frac{2}{-5}, \quad \frac{3}{-2} = \frac{(-1) \cdot 3}{(-1) \cdot (-2)} = \frac{-3}{2}$$

\rightarrow Hier haben wir jeweils mit (-1) erweitert.

$$\frac{-4}{-7} = \frac{(-1) \cdot 4}{(-1) \cdot 7} = \frac{4}{7}$$

\rightarrow Hier haben wir (-1) ausgeklammert und anschließend gekürzt.

23 / 38

Definition 1.3 Negative Brüche

Für $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} \quad \text{und} \quad \frac{a}{b} = \frac{-a}{-b} = -\frac{-a}{b} = -\frac{a}{-b}$$

24 / 38

Addieren und Subtrahieren

- Nächster Schritt: Wir möchten zwei **Brüche addieren bzw. subtrahieren**
- Schauen wir uns dafür zunächst folgende Brüche an:

$$\frac{5}{6} \quad \frac{4}{9}$$

- Wie können wir diese beiden Brüche addieren bzw. subtrahieren?
- Zähler und Nenner dürfen wir nicht getrennt voneinander addieren bzw. subtrahieren.
- Wir benötigen dazu einen sogenannten **Hauptnenner!**
- D.h. wir müssen die Brüche so erweitern bzw. kürzen, dass sie anschließend den gleichen Nenner besitzen.

25 / 38

Hauptnenner finden ($\frac{5}{6}$ und $\frac{4}{9}$)

- Der kleinste Hauptnenner entspricht dem **kleinsten gemeinsamen Vielfachen (kgV)** der beiden Nenner.
- In unserem Fall entspricht das kgV von 6 und 9, also der beiden Nenner, 18.
- Wir bringen also nun beide Brüche durch Erweitern auf den Hauptnenner 18:

$$\frac{5}{6} = \frac{3 \cdot 5}{3 \cdot 6} = \frac{15}{18} \quad \frac{4}{9} = \frac{2 \cdot 4}{2 \cdot 9} = \frac{8}{18}$$

- Nun können wir die beiden Brüche einfach addieren bzw. subtrahieren, indem wir die Zähler addieren bzw. subtrahieren:

$$\frac{15}{18} + \frac{8}{18} = \frac{15 + 8}{18} = \frac{23}{18} \quad \text{bzw.} \quad \frac{15}{18} - \frac{8}{18} = \frac{15 - 8}{18} = \frac{7}{18}$$

26 / 38

Hauptnenner finden (Fortsetzung)

- Lässt sich das kgV nicht schnell erkennen gibt es folgende Methode:
 - ▶ Wir erweitern einfach jeweils mit dem Nenner des anderen Bruchs und umgekehrt.
 - ▶ Nach der Addition bzw. Subtraktion muss meist noch gekürzt werden.
 - ▶ Funktioniert immer!
- Einmal an unserem Beispiel veranschaulicht:

$$\frac{5}{6} + \frac{4}{9} = \frac{9 \cdot 5}{9 \cdot 6} + \frac{6 \cdot 4}{6 \cdot 9} = \frac{45}{54} + \frac{24}{54} = \frac{45 + 24}{54} = \frac{69}{54} = \frac{3 \cdot 23}{3 \cdot 18} = \frac{23}{18}$$

$$\frac{5}{6} - \frac{4}{9} = \frac{9 \cdot 5}{9 \cdot 6} - \frac{6 \cdot 4}{6 \cdot 9} = \frac{45}{54} - \frac{24}{54} = \frac{45 - 24}{54} = \frac{21}{54} = \frac{3 \cdot 7}{3 \cdot 18} = \frac{7}{18}$$

27 / 38

Addition und Subtraktion (Definition)

Allgemein lässt sich also Folgendes definieren:

Definition 1.4 Addition und Subtraktion

Seien $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2} \in \mathbb{Q}$, dann gilt für die Addition bzw. Subtraktion dieser Brüche:

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 \cdot b_2}{b_1 \cdot b_2} + \frac{a_2 \cdot b_1}{b_2 \cdot b_1} = \frac{a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1}{b_1 \cdot b_2}$$

bzw.

$$\frac{a_1}{b_1} - \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 \cdot b_2}{b_1 \cdot b_2} - \frac{a_2 \cdot b_1}{b_2 \cdot b_1} = \frac{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1}{b_1 \cdot b_2}$$

28 / 38

Aufgaben

Berechnen Sie die folgenden Terme:

$$\frac{5}{7} + \frac{3}{4} = ?$$

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{4} = ?$$

$$\frac{-3}{2} + \frac{3}{-4} = ?$$

$$\frac{2}{112} - \frac{3}{336} = ?$$

29 / 38

Division

- Bei der **Division von Brüchen** nutzen wir einen kleinen Trick.
- Schauen wir uns dafür einen Bruch an und schreiben ihn ein wenig um:

$$5 \div 6 = \frac{5}{6} = \frac{5}{1} \cdot \frac{1}{6} = 5 \cdot \frac{1}{6}$$

- Anstatt zu dividieren kann man auch mit dem **Kehrwert multiplizieren!**
- Beispiel mit zwei Brüchen:

$$\frac{5}{6} \div \frac{4}{9} = \frac{5}{6} \cdot \frac{9}{4} = \frac{45}{24} \quad \left(= \frac{3 \cdot 15}{3 \cdot 8} = \frac{15}{8} \right)$$

31 / 38

Multiplikation

- Die **Multiplikation von Brüchen** ist weniger umständlich als die Addition bzw. Subtraktion.
- Schauen wir uns dafür wieder folgende Brüche an:

$$\frac{5}{6} \quad \frac{4}{9}$$

- Wir benötigen für die Multiplikation keinen gemeinsamen Teiler.
- Man multipliziert einfach beide Zähler und beide Nenner miteinander und kürzt wenn möglich:

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{4}{9} = \frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 9} = \frac{20}{54} = \frac{2 \cdot 10}{2 \cdot 27} = \frac{10}{27}$$

30 / 38

Multiplikation und Division (Definition)

Allgemein lässt sich also Folgendes für die Multiplikation und Division von Brüchen definieren:

Definition 1.5 Multiplikation

Seien $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2} \in \mathbb{Q}$, dann gilt für die Multiplikation dieser Brüche:

$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 \cdot a_2}{b_1 \cdot b_2}$$

Definition 1.6 Division

Seien $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2} \in \mathbb{Q}$ und $b_1, b_2 \neq 0$ dann gilt für die Division dieser Brüche:

$$\frac{a_1}{b_1} \div \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{b_2}{a_2} = \frac{a_1 \cdot b_2}{b_1 \cdot a_2}$$

32 / 38

Aufgaben

Berechnen Sie die folgenden Terme:

$$\frac{5}{7} \cdot \frac{3}{4} = ?$$

$$\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} = ?$$

$$\frac{-3}{2} \cdot \frac{3}{-4} = ?$$

$$\frac{2}{112} \div \frac{3}{336} = ?$$

33 / 38

Beispielaufgaben

Konstruieren Sie jeweils einen Bruch aus folgenden Zahlen:

a) 1,573

b) 3,86424

Zu a): Hinter dem Komma sind **drei** Stellen → wir erweitern mit 1000:

$$1,573 = \frac{1,573 \cdot 1000}{1000} = \frac{1573}{1000}$$

$$3,86424 = ?$$

35 / 38

Weitere Rechenregeln

- Manchmal muss man Brüche etwas umschreiben, bevor man mit ihnen weiterrechnen kann:

Regel 1: Multiplikation mit 1 verändert den Bruch nicht

Beispiel:

$$\frac{5}{2} = \frac{5}{2} \cdot 1 = \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{7} = \frac{35}{14}$$

→ Mit einer 1 multiplizieren ist dasselbe wie Erweitern mit einer beliebigen Zahl (hier 7).

Regel 2: Ein Bruch verändert sich bei einer Addition mit 0 nicht

Beispiel:

$$\frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} + \frac{-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$$

→ Kann Brüche in gewissen Situationen vereinfachen.

34 / 38

Perioden und Brüche

- Dezimalzahlen mit Perioden lassen sich meist ohne großen Aufwand als Bruch darstellen.
- Ein Aufteilen der jeweiligen Zahl ist dabei oft erforderlich:
- Beispiele:**

$$2,\bar{3} = 2 + 0,\bar{3} = 2 + \frac{3}{9} = \frac{18}{9} + \frac{3}{9} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$$

- Bei der Zahl **mit** der Periode mit **einer** Stelle, haben wir im Bruch im Nenner **eine** Neun geschrieben.
- Bei einer Zahl mit einer Periode mit **zwei Stellen** schreiben wir im Nenner **zwei** Neunen:

$$3,\overline{34} = 3 + 0,\overline{34} = 3 + \frac{34}{99} = \frac{297}{99} + \frac{34}{99} = \frac{331}{99}$$

36 / 38

Zusammenfassung und Ausblick

- Ein Bruch hat unendlich viele Darstellungsweisen (Kürzen, Erweitern)
- Addition und Subtraktion nur mit gleichem Hauptnenner
 - ▶ Kleinstes gemeinsames Vielfaches (kgV) suchen!
- Multiplikation durch jeweilige Multiplikation der Nenner und Zähler
- Division durch Multiplikation mit dem Kehrwert
- In Mafl 2 werdet ihr häufig mit Brüchen außerhalb der rationalen Zahlen arbeiten:
 - ▶ $\frac{\sqrt{3}}{2} \notin \mathbb{Q}$

Quellen und Literatur

- [1] Akad. Dir. Dr. Martin Scheer, Maximilian Sperber
„Mathematischer Vorkurs“.
TU Dortmund 2021.