02 - Potenzrechnung & Trigonometrie

Vorkurs Mathematik SoSe 2022

Lukas Mürmann

Fakultät Informatik - Lehrstuhl 7 - TU Dortmund

08.03.2022

Potenzrechnung

Potenzen

- Multiplizieren wir dieselbe Zahl viele Male, so bietet sich folgende Kurzschreibweise an:

$$\underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}_{6 Mal} = \underbrace{4^6}_{Potenz}$$

- Die malgenommene Zahl (hier 4) nennen wir die **Basis** der Potenz.
- Die Anzahl, wie oft multipliziert wird (hier 6) nennen wir den **Exponent** der Potenz.
- Negative Exponenten sind erlaubt. Dabei gilt dann:

$$8^{-3} = \frac{1}{8^3}$$

- Das funktioniert auch im Nenner:

$$\frac{1}{2^{-4}} = \frac{1}{\frac{1}{2^4}} = 1 : \frac{1}{2^4} = 1 \cdot \frac{2^4}{1} = 2^4$$

Definition Potenzen

Definition 2.1 Potenz

Ein Produkt aus gleichen Faktoren $a \in \mathbb{R}$ wird kurz geschrieben als Potenz:

$$\prod_{k=1}^{n} a = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a}_{n-Mal} = a^n$$

- a heißt die **Basis** der Potenz.
- n heißt der **Exponent** der Potenz.
- Potenzen mit **negativen Exponenten** wechseln vom Zähler in den Nenner und umgekehrt.

$\rightarrow$ Um Potenzen auch miteinander verrechnen zu können schauen wir uns jetzt die Potenzgesetze an.

Potenzen mit gleicher Basis (Division und Multiplikation)

Potenzgesetz 1: Potenzen mit gleicher Basis

- Potenzen mit gleicher Basis werden **multipliziert**, indem man die Exponenten **addiert** und die Basis beibehält:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

- Potenzen mit gleicher Basis werden **dividiert**, indem man die Exponenten **subtrahiert** und die Basis beibehält:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Beispiele Potenzgesetz 1

Beispiele:

- $3^2 \cdot 3^3 = (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 3^{2+3}$
- $2^4 \cdot 2^6 = 2^{10}$
- $5^2 \cdot 5 = 5^2 \cdot 5^1 = 5^{2+1} = 5^3$
- $6^4 : 6^2 = \frac{6^4}{6^2} = \frac{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6}{6 \cdot 6} = 6^{4-2} = 6^2$
- $\frac{2^7}{2^9} = 2^{7-9} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$
- $6^7 \cdot 6^{-7} = 6^7 \cdot \frac{1}{6^7} = \underbrace{\frac{6^7}{6^7}}_{=1} = 6^{7-7} = 6^0 = 1$

Aufgaben Potenzgesetz 1

Vereinfachen und Berechnen Sie wenn möglich:

$$2^5 \cdot 2^7 = ?$$

$$2^5 : 2^7 = ?$$

$$3^5 \cdot 3^7 = ?$$

$$\frac{5^7}{5^9} = ?$$

$$\frac{3^7}{3^9} : \frac{2^7}{2^5} = ?$$

Potenzen mit gleichem Exponenten (Division und Multiplikation)

Potenzgesetz 2: Potenzen mit mit gleichem Exponenten

- Potenzen mit gleichem Exponenten werden **multipliziert**, indem man die Basen **multipliziert** und den Exponenten beibehält:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

- Potenzen mit gleichem Exponenten werden **dividiert**, indem man die Basen **dividiert** und den Exponenten beibehält:

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Beispiele Potenzgesetz 2

Beispiele:

- $2^2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) = (2 \cdot 3)^2 = 6^2$
- $(-2)^6 \cdot 4^6 = ((-2) \cdot 4)^6 = (-8)^6 = (-1)^6 \cdot 8^6 = 1 \cdot 8^6 = 8^6$
- $2^{14} \cdot 9^{14} = (2 \cdot 9)^{14} = 18^{14}$
- $2^{-3} \cdot 4^{-3} = (2 \cdot 4)^{-3} = 8^{-3} = \frac{1}{8^3}$
- $\frac{4^7}{2^7} = \left(\frac{4}{7}\right)^7 = 2^7$
- $\frac{3^{-3}}{6^{-3}} = \left(\frac{3}{6}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{1}\right)^3 = 2^3$

Aufgaben Potenzgesetz 2

Vereinfachen und Berechnen Sie wenn möglich:

$$5^2 \cdot 3^2 = ?$$

$$2^5 : 7^5 = ?$$

$$3^{18} \cdot 3^{18} = ?$$

$$\frac{5^7}{10^7} = ?$$

$$\frac{5^7}{2^9} : \frac{10^9}{4^7} = ?$$

Potenzieren von Potenzen

- Potenzen können auch mehrfach mit sich selbst multipliziert werden.
- Das heißt auch Potenzen können **potenziert** bzw. mit einem Exponenten versehen werden.
- Wie das genau funktioniert, können wir mithilfe unserer bisher erlangten Potenzgesetze herausfinden:
  - $(5^2)^4 = \underbrace{5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 = 5^{2+2+2+2}}_{\textit{Potenzgesetz } 1} = 5^8 \qquad (= 5^{2\cdot 4})$
  - $(7^2)^3 = \underbrace{(7 \cdot 7)^3 = 7^3 \cdot 7^3}_{\textit{Potenzgesetz } 2} = 7^{3+3} = 7^6 \qquad (= 7^{2\cdot 3})$
  - $(9^{18})^2 = 9^{2\cdot 18} = 9^{36}$

Potenzieren von Potenzen (Potenzgesetz 3)

Potenzgesetz 3: Potenzieren von Potenzen

- Potenzen werden **potenziert**, indem man die Exponenten miteinander **multipliziert**:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Potenzen mit rationalen Exponenten

- Für eine positive Basis a kann man auch mit Brüchen als Exponent einer Potenz rechnen:
  - $4^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{4^3} = \sqrt{4^3}, \qquad 3^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{3^4}, \qquad 2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3}$
  - $3^{(-\frac{1}{2})} = \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt[2]{3^1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Potenzgesetz 4: Potenzen mit rationalen Exponenten

- Sei $a > 0, m \neq 0$
- Potenzen mit rationalen Exponenten werden zu Wurzelausdrücken:

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$$

- Die Bedingungen an a und m stellen sicher:
  - Ausdruck unter der Wurzel wird nicht negativ.
  - Es wird an keiner Stelle durch 0 geteilt wird.

Aufgaben Potenzgesetze 3 und 4

Vereinfachen und Berechnen Sie wenn möglich:

$$\left(3^7\right)^8 = ?$$

$$\left(6^{\frac{1}{3}}\right)^6 = ?$$

$$\left(5^2\right)^{5^2} = ?$$

$$\sqrt{(8^2)^{\frac{1}{3}}} = ?$$

Binomische Formeln

- Auch Summen können potenziert werden:
- Hierfür kennen Sie bereits die **Binomischen Formeln**:

Satz 2.1 Binomische Formeln

- Für reele Zahlen a, b gelten die **Binomischen Formeln**:

1. Bin. Formel: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. Bin. Formel: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3. Bin. Formel: $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$

Beispiele:

1. $(3+5)^2 = (3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 5 + 5^2) = 9 + 30 + 25 = 64$
2. $(3-5)^2 = (3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 + 5^2) = 9 - 30 + 25 = 4$
3. $(3-2) \cdot (3+2) = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$

Rechnen mit Wurzeln

Bemerkung 2.1

- Was halten Sie von dieser "Lösung" eines Studierenden?

$$\sqrt{16+9} = \sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$$

- Das ist natürlich FALSCH! Denn:

$$\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 \neq 7$$

- Oder mit unseren Potenzgesetzen:

$$\sqrt{16+9} = (16+9)^{\frac{1}{2}} \neq 16^{\frac{1}{2}} + 9^{\frac{1}{2}}$$

$\rightarrow$ Wurzeln nie summandenweise berechnen, denn:

- Im Allgemeinen ist $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Sinus & Cosinus

Einleitung

- Wir wollen nun kurz Sinus und Cosinus wiederholen.
- Ihr habt das alle in der Mittelstufe in der Schule gemacht.
- Jedoch vermutlich nicht über den folgenden Ansatz!
- Dazu müssen wir auch über Winkel reden:
  - In der Schule habt ihr im **Gradmaß** gerechnet.
  - Hier messen wir Winkel zumeist im **Bogenmaß**.
  - Beispiel:

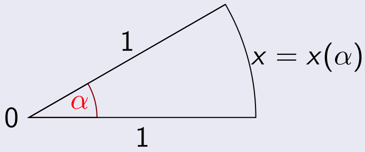
$$\alpha = \frac{3}{4}\pi$$

- Was hat es damit auf sich?

Definition Bogenmaß

Definition 2.2 Bogenmaß

Schauen wir uns mal den Begriff **Bogenmaß** am Einheitskreis an, also einem Kreis um den Nullpunkt mit Radius 1.



- Wir nennen die Länge des Weges auf dem Kreisrand $x = (x(\alpha))$.
- Wir sehen: x ist abhängig von α.
- $x(\alpha)$ ist unser **Bogenmaß** des Winkels α und es gilt:

$$\frac{x(\alpha)}{2\pi} = \frac{\alpha}{360^\circ} \iff x(\alpha) = \frac{2\pi\alpha}{360^\circ} \iff \alpha = \frac{360^\circ \cdot x(\alpha)}{2\pi}$$

Winkeldarstellungen

- Winkel lassen sich also auf verschiedene Arten darstellen:
- Winkel können in Grad angegeben werden:
  - 15° 45° 180° 360°
  - Ein volle Umdrehung entspricht 360°.
- Anderseits können sie aber auch im Bogenmaß angegeben werden:
  - $\frac{1}{12}\pi$ $\frac{1}{4}\pi$ π 2π
  - Ein volle Umdrehung entspricht 2π, dem Umfang des Einheitskreises.
- $2\pi \mathrel{\hat{=}} 360^\circ$

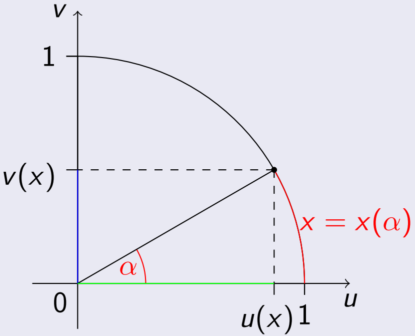
Winkelumrechnung

- Mithilfe der Formel aus Definition 2.2 können wir leicht von einer Darstellungsart in die andere wechseln.
  - 60° im Bogenmaß:
  $$x(60^\circ) = \frac{2\pi \cdot 60^\circ}{360^\circ} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$
  - 90° im Bogenmaß:
  $$x(90^\circ) = \frac{2\pi \cdot 90^\circ}{360^\circ} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$
  - $\frac{2}{3}\pi$ im Gradmaß:
  $$\alpha = \frac{360^\circ \cdot x(\alpha)}{2\pi} = \frac{360^\circ \cdot \frac{2}{3}\pi}{2\pi} = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$$

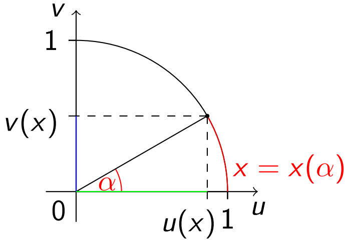
Weg zu Sinus und Cosinus

Definition 2.3 $u(x)$ und $v(x)$

- Wir können ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$ auch am Einheitskreis einzeichnen.
- Dabei soll x der Länge des Kreisbogens $x(\alpha)$ entsprechen.



Weg zu Sinus und Cosinus Teil 2



Definition 2.3 $u(x)$ und $v(x)$ (Fortsetzung)

- In der Veranschaulichung wandern wir um x auf dem Kreisbogen und erhalten dort einen Punkt $(u(x), v(x))$.
- Der sich dadurch ergebene Winkel ist unser α.
- Dabei gehen wir:
  - gegen den Uhrzeigersinn für $x \geq 0$
  - im Uhrzeigersinn für $x < 0$

Sinus und Cosinus

Definition 2.4 Sinus und Cosinus

- Mithilfe von Definition 2.3 können wir nun zwei Funktionen definieren:

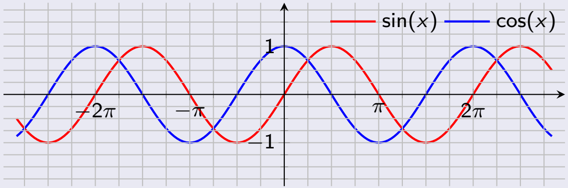
$$u(x) = \cos x, \qquad\qquad v(x) = \sin x$$

- Die hier definierten Funktionen heißen **Cosinus**- bzw. **Sinusfunktion**.
- Ihre angenommenen Werte liegen stets im Intervall zwischen -1 und 1.
- Sie gehören zu den sog. trigonometrischen Funktionen.

Sinus und Cosinus (Graph)

Graph von Sinus und Cosinus

- Für jedes x, welches wir auf dem Einheitskreis festlegen, besitzen $\sin x$ und $\cos x$ jeweils einen Wert.
- Wenn wir das für jedes x aus den reelen Zahlen machen, erhalten wir die Graphen der Funktionen:

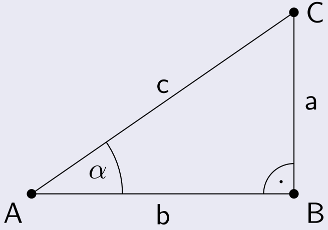


- Das geht nach links und rechts immer so weiter.
- Beide Funktionen sind 2π-periodisch.

Trigonometrischer Satz (Teil 1)

- Betrachten wir nun das entstandene Dreieck aus Def. 2.3 genauer:

Bemerkung 2.2



$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} \quad \text{und} \quad \cos(\alpha) = \frac{b}{c}$$

- Bei $c = 1$ (Einheitskreis) kommen wir zu dem Spezialfall von eben.

Trigonometrischer Satz (Teil 2)

- Nun wollen wir eine wichtige Gleichung anhand des rechtwinkligen Dreiecks mit $c = 1$ herausfinden.

Bemerkung 2.3

- Aus der Schule kennt man noch den Satz des Pythagoras:
  - In einem rechtwinkligen Dreieck gilt:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

  - Wobei c dabei der längsten Seitenlänge (Hypotenuse) entspricht.
- Nutzen wir bei unserem Dreieck aus, dass $c = 1$ gilt, so erhalten wir:

$$a^2 + b^2 = 1 \iff \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

- Diese Gleichung nennt man auch den **Trigonometrischen Satz des Pythagoras**.

Wichtige Eigenschaften von Sinus und Cosinus Teil 1

Folgerung 2.1

Aus Definition 2.4 (Sinus u. Cosinus) folgt unmittelbar:

1. Cosinus- und Sinusfunktion sind 2π-periodisch, d.h. es gilt:

   $$\cos(x + 2\,k\,\pi) = \cos x, \quad \sin(x + 2\,k\,\pi) = \sin x \;\text{ mit } x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$$

   (Nach einer vollen Umdrehung ist man wieder am selben Punkt)

2. $\cos(-x) = \cos x \quad \rightarrow \quad$ cos ist eine gerade Funktion.
3. $\sin(-x) = -\sin x \quad \rightarrow \quad$ sin ist eine ungerade Funktion.
4. $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$
5. $|\cos x| \leq 1, \quad |\sin x| \leq 1, \quad |\sin x| \leq |x|$

Wichtige Eigenschaften von Sinus und Cosinus Teil 2

Folgerung 2.1 (Fortsetzung)

6. Für die Nullstellen von Sinus und Cosinus gilt:

   a) $\cos x = 0 \iff x = (2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}$ für ein $k \in \mathbb{Z}$

   $\rightarrow$ Cosinus ist für alle ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$ gleich 0.

   b) $\sin x = 0 \iff x = k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$

   $\rightarrow$ Sinus ist für alle Vielfachen von π gleich 0.

- Spezielle Werte von Sinus und Cosinus:

x	0	$\frac{\pi}{6} \mathrel{\hat{=}} 30°$	$\frac{\pi}{4} \mathrel{\hat{=}} 45°$	$\frac{\pi}{3} \mathrel{\hat{=}} 60°$	$\frac{\pi}{2} \mathrel{\hat{=}} 90°$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Quellen und Literatur

[1] Akad. Dir. Dr. Martin Scheer, Maximilian Sperber
„Mathematischer Vorkurs“.
TU Dortmund 2021.