03 - Logarithmus & e-Funktion

Vorkurs Mathematik SoSe 2022

Lukas Mürmann

Fakultät Informatik - Lehrstuhl 7 - TU Dortmund

09.03.2022

Logarithmus & e-Funktion

Exponentialfunktionen

- Was sind noch mal Exponentialfunktionen?
  - Funktionen der Form $f(x) = a^x$ mit $a > 0$ und $a \neq 1$.
  - x taucht hier also im Exponenten auf.
  - Wichtig zur Beschreibung von Wachstumsvorgängen.

e-Funktion

- Die **e-Funktion** $f(x) = e^x$ bezeichnet man dabei als **natürliche Exponentialfunktion**, denn:
  - Jede Exponentialfunktion lässt sich mithilfe der e-Funktion und des **natürlichen Logarithmus** ($\ln x$) auf eine solche zur Basis e zurückführen.
  - Das kann man dann so schreiben: $a^x = e^{x \cdot \ln a}$
  - Es gilt $e = 2,718281...$ (mehr dazu in Mafl 2)
  - Der natürliche Logarithmus ist dabei die Umkehrfunktion der e-Funktion.
  - D.h. es gilt:

$$e^{\ln x} = x \qquad \text{und} \qquad \ln(e^x) = x$$

Rechnen mit der e-Funktion

- Wir wollen im Folgenden lernen mit der Exponentialfunktion und dem natürlichen Logarithmus zu rechnen.

Folgerung 3.1 Rechengesetze der e-Funktion

Es gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$:

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y} \qquad \text{und} \qquad (e^x)^y = e^{xy}$$

- Unsere Potenzgesetze gelten also auch für die e-Funktion.
- Diese Regeln werden auch **Additionstheoreme der Exponentialfunktion** genannt.

Aufgaben e-Funktion

Vereinfachen und Berechnen Sie wenn möglich:

$$e^{4x+2} \cdot e^{-2-4x} = e^{4x+2+(-2-4x)} = e^0 = 1$$

$$e^x e^y e^{-2x} e^{3y} e^{2x+y} e^{-4y} = e^{x+y-2x+3y+2x+y-4y} = e^{x+y}$$

Rechnen mit dem natürlichen Logarithmus

- Für das Rechnen mit dem nat. Logarithmus (ln) existieren folgende Regeln:

Bemerkung 3.1 Rechengesetze des natürlichen Logarithmus

Für $x, y > 0$ gilt:

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \quad \text{und} \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

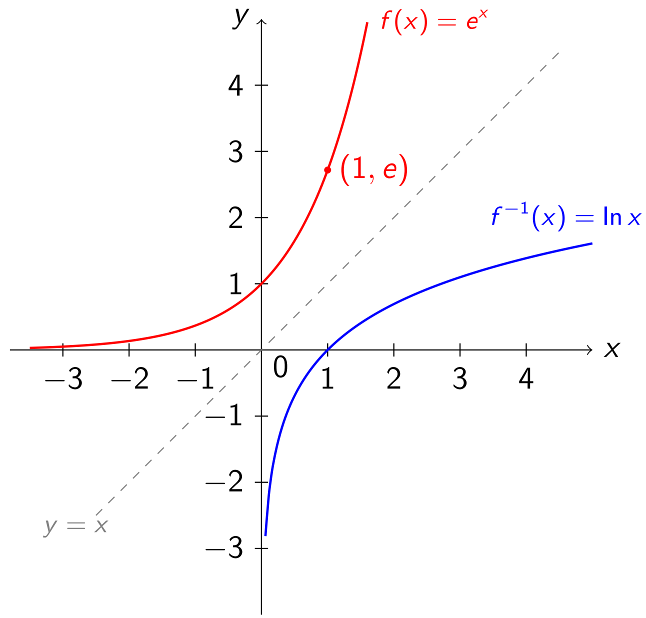
Daraus kann man ableiten:

$$\ln(x^n) = \ln(\underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n-mal}) = \underbrace{\ln x + \ln x + \ln x + \ldots + \ln x}_{n-mal} = n \cdot \ln x$$

$$\Rightarrow \ln(x^n) = n \cdot \ln x$$

- **Wichtig:** Bei $\ln(x)$ dürfen für x nur positive Werte eingesetzt werden.

Funktionsgraphen



Quellen und Literatur

[1] Akad. Dir. Dr. Martin Scheer, Maximilian Sperber
„Mathematischer Vorkurs“.
TU Dortmund 2021.