04 - Abbildungen

Vorkurs Mathematik SoSe 2022

Lukas Mürmann

Fakultät Informatik - Lehrstuhl 7 - TU Dortmund

10.03.2022

Abbildungen

Abbildung

- Was ist genau eine Abbildung?
- Bei einer Abbildung betrachten wir zwei Mengen. Diese werden **Definitionsbereich** bzw. **Wertebereich** genannt.
- Dann benötigt man noch eine **Abbildungsvorschrift**.
- Diese ordnet Elementen aus dem Definitionsbereich Elemente aus dem Wertebereich zu.
  - **Wichtig:** Jedes Element aus dem Definitionsbereich wird jeweils auf **genau ein** Element aus dem Wertebereich abgebildet.
  - In der Schule: Jedem x wird genau ein y zugeordnet.
  - Im Studium: Jedem x wird genau ein $f(x)$ zugeordnet.
  - Die Begriffe **Abbildung** und **Funktion** bedeuten genau dasselbe.

Abbildungen untersuchen

- Um eine Abbildung zu untersuchen kann man:
  1. Eine Wertetabelle aufstellen.
  2. Den Funktionsgraphen zeichnen.
  3. Ableitungen bestimmen (falls möglich).
  4. Integrieren (falls möglich).
  5. Null- und Extremstellen berechnen (falls möglich).
  6. Umkehrabbildungen konstruieren (falls möglich).
  7. Funktionseigenschaften nachprüfen (Symmetrien, gerade, ungerade, etc.)
- Mehr zu diesen Verfahren in den folgenden Vorlesungen.

Wertetabellen

x	$f(x) = x^2$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
5	25
10	100

x	$f(x) = x^3$
-4	-64
-2	-8
-1	-1
0	0
2	8
3	27

x	$f(x) = \sqrt{x}$
-1	-
0	0
2	1,414...
4	2
16	4
256	16

$f(x) = x^2$

- Sehen wir uns einfach mal eine Abbildung als Beispiel an:

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x) = x^2$$

- Diese Schreibweise für eine Abbildung versteht man so:
  - f ist der Bezeichner bzw. Name der Abbildung.
  - Die Menge links vom Pfeil ($\to$) ist unser Definitionsbereich.
  - Also $D_f = \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}_{\geq 0}$ (Alle nicht negativen Reellen Zahlen).
  - Der Wertebereich ist entsprechend die Menge rechts ($W_f = \mathbb{R}$).
  - Die Abbildungsvorschrift lautet $f(x) = x^2$.

$f(x) = x^2$

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x) = x^2$$

- Setzen wir mal ein paar Werte ein:
  - Starten wir mit $x = 2$. Dann folgt mit der Abbildungsvorschrift $f(2) = 2^2 = 4$.
  - Dann $x = 0$: Es folgt $f(0) = 0^2 = 0$.
  - Anschließend noch $x = -2$. Was kommt heraus?
  - $x = -2$ dürfen wir gar nicht einsetzen, weil $-2 \notin D_f = \mathbb{R}_{\geq 0}$.
  - **Wichtig:** Wir dürfen nur Elemente des Definitionsbereichs einsetzen.

Definition von Abbildungen

Definition 4.1 Abbildungen

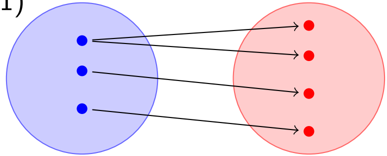
- Seien D und W nicht-leere Mengen:
- Eine **Abbildung** f von D nach W ordnet jedem Element $x \in D$ genau ein Element $f(x) \in W$ zu.
- Notation: $x \mapsto f(x)$
- Man schreibt:

$$f : D \to W \text{ mit Abbildungsvorschrift } f(x)$$

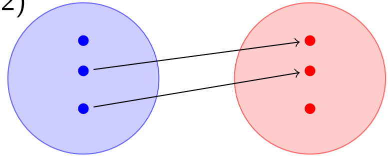
- D heißt **Definitionsmenge** oder auch **Definitionsbereich**.
- W heißt **Wertemenge** oder auch **Wertebereich**.

Abbildung oder nicht?

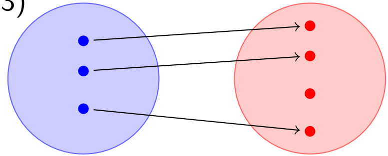
(1)



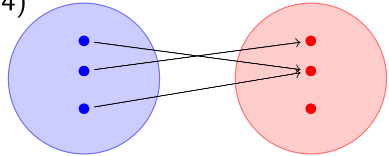
(2)



(3)



(4)



$\rightarrow$ (3) und (4) sind Abbildungen, (1) und (2) sind keine Abbildungen.

Definition von Abbildungen (Fortsetzung)

Definition 4.1 Fortsetzung

- Wir betrachten die Abbildung
  $f : D \to W \quad \text{mit} \quad x \mapsto f(x) = y.$
- $y = f(x)$ heißt das **Bild** von x (bzw. der **Funktionswert** von x) unter f.
- Die Elemente aus W, die wirklich getroffen bzw. die mit f abgebildet werden, nennen wir das **Bild** von f:

$$\mathrm{Bild}(f) := f(D) := \{y \in W \,|\, \exists x \in D \ \text{ mit } \ f(x) = y\} \subseteq W$$

- $\exists$ ist der sogenannte Existenzquantor.
- Er liest sich als: Es existiert...

Funktion und Bild

- Statt Abbildung verwendet man auch den Begriff **Funktion**, vor allem wenn f in die reellen oder komplexen Zahlen abbildet.
- Der Wertebereich einer Abbildung ist meist größer als das tatsächliche **Bild** der Abbildung.
- Das Bild ist also deutlich interessanter als der Wertebereich.
  - Bei unserem Beispiel war für $f(x) = x^2$ auch $W_f = \mathbb{R}$ angegeben.
  - Das Bild (f) ist aber - nach etwas Überlegung - gleich $\mathbb{R}_+$.

Beispiele für das Bild einer Abbildung

- Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Abbildung mit $f(x) = x^2$
  - Bestimme das Bild der Abbildung f:
  - Antwort: $\text{Bild}(f) = \mathbb{R}_+$
- Sei $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ Abbildung mit $g(x) = -x^2$
  - Bestimme das Bild der Abbildung g:
  - Antwort: $\text{Bild}(g) = \mathbb{R}_-$

Urbild

- Neben dem Bild einer Funktion existiert auch das Konzept des Urbildes.
- Versuchen wir dieses im Folgenden zu verstehen.
- Nehmen wir dazu ein Element y aus dem Bild(f).
- Dann kann man sich fragen:
  - Welche Elemente $x \in D_f$ werden mit f genau auf dieses Element y abgebildet?
  - Das können ja durchaus mehrere sein.
  - Die Antwort auf diese Frage ist das **Urbild** von y unter der Funktion f
  - Das Urbild ist immer eine **Menge**
- Oder man fragt sich dies für alle Elemente einer (Teil-)Menge U aus W:
  - Welche $x \in D_f$ werden in diese Menge U, also auf ein beliebiges Element aus U, abgebildet?

Definition des Urbilds

Definition 4.2 Urbild

- Sei $f : D \to W$ eine Abbildung, sei $U \subseteq W$
- Das **Urbild** von U unter f ist dann - als Menge geschrieben:

$$f^{-1}(U) := \{x \in D \,|\, f(x) \in U\} \subseteq D$$

- Das Urbild von U ist also die Menge aller Elemente von D, deren Bild in U liegt.
- Also die Elemente, die mit der Abbildung f auf eines der Elemente von U abgebildet werden.
- **Hinweis:** f^{-1} ist hier nur eine Schreibweise und nicht mit der Umkehrfunktion zu verwechseln.

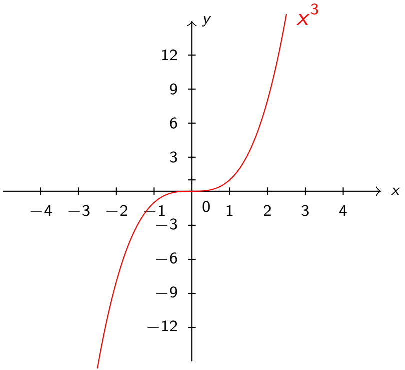
Beispiele für Urbilder

- Sei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ Abbildung mit $f(x) = x^2$.
  - Berechne das Urbild der Menge $U = \{4, 9\}$ unter der Abbildung f.
  - Antwort: $f^{-1}(U) = \{2, 3\}$
- Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Abbildung mit $g(x) = x^2$.
  - Berechne das Urbild der Menge $U = \{4, 9\}$ unter der Abbildung g.
  - Antwort: $g^{-1}(U) = \{-3, -2, 2, 3\}$

Definition Funktionsgraph

Definition 4.3 Funktionsgraph

- Sei $f : D \to W$ mit $D, W \subseteq \mathbb{R}$ eine Abbildung.
- Die Menge der Punkte $G = \{(x, f(x)) \,|\, x \in D\}$ bezeichnet man als den **Graph** von f.



Gleichheit von Abbildungen

- **Frage:** Wann sind zwei Abbildungen f und g gleich?
- **Antwort:**
  - Die Definitionsbereiche müssen gleich sein.
  - Die Wertebereiche müssen gleich sein.
  - Für **jedes** x aus dem Definitionsbereich muss gelten: $f(x) = g(x)$

Bemerkung 4.1 Gleichheit von Abbildungen

- Zwei Abbildungen $f : D_1 \to W_1$ und $g : D_2 \to W_2$ sind **gleich**, genau dann, wenn gilt:

$$D_1 = D_2, \quad W_1 = W_2$$

und

$$f(x) = g(x) \text{ für alle } x \in D_1 (= D_2)$$

Identitätsfunktion

Definition 4.4 Identitätsfunktion

- Eine besonderen Abbildung ist die sogenannte **Identität**.
- Bezeichnung: $id : D \to D$ mit $x \mapsto id(x) = x$.
- Diese Abbildung bildet jedes $x \in D$ **auf sich selbst** ab, also es gilt stets:

$$id(x) = x \text{ für alle } x \in D$$

- Hinweis: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$ ist die **Winkelhalbierende**, also die Gerade durch den Ursprung mit Steigung 1.

Einleitung Umkehrabbildungen

- Unser Ziel ist es nun Umkehrabbildungen einzuführen.
- Dazu brauchen wir noch ein paar Eigenschaften von Abbildungen.
- **Denn:**
  - Die Umkehrabbildung f^{-1} einer Abbildung f muss auch eine Abbildung sein.
  - Sie bildet jeden Funktionswert $y = f(x)$ wieder auf **genau das** ursprüngliche Argument von f ab.
  - Also $f^{-1}(y) = x$
  - Wir werden sehen: Nicht jede Funktion/Abbildung besitzt eine Umkehrabbildung.
- Wir brauchen jetzt erst einmal ein paar Definitionen.

Injektivität

Definition 4.5 Injektivität einer Funktion

- Eine Funktion $f : D \rightarrow W$ heißt **injektiv**, genau dann, wenn:
  - Jeder Wert aus dem Wertebereich **höchstens einmal** getroffen wird.
- Es kann dann also nicht sein, dass nach dem Einsetzen verschiedener x-Werte derselbe Funktionswert $f(x)$ herauskommt.
- Kein Funktionswert kommt mehr als einmal vor...
- Es muss weiterhin nicht jeder Wert aus dem Wertebereich als Funktionswert vorkommen.

Surjektivität

Definition 4.6 Surjektivität einer Funktion

- Eine Funktion $f : D \to W$ heißt **surjektiv**, genau dann, wenn:
  - Jeder Wert aus dem Wertebereich **mindestens einmal** getroffen wird.
- Surjektivität bedeutet also:
  - Alle Werte aus dem Wertebereich werden tatsächlich erreicht.
  - Mehrfach abgebildete Werte verstoßen nicht gegen die Surjektivität.
- In diesem Fall entspricht also das $\text{Bild}(f)$ genau dem Wertebereich von f
- Es gilt also:

$$\text{Bild}(f) = W$$

Bijektivität

Definition 4.7 Bijektivität einer Funktion

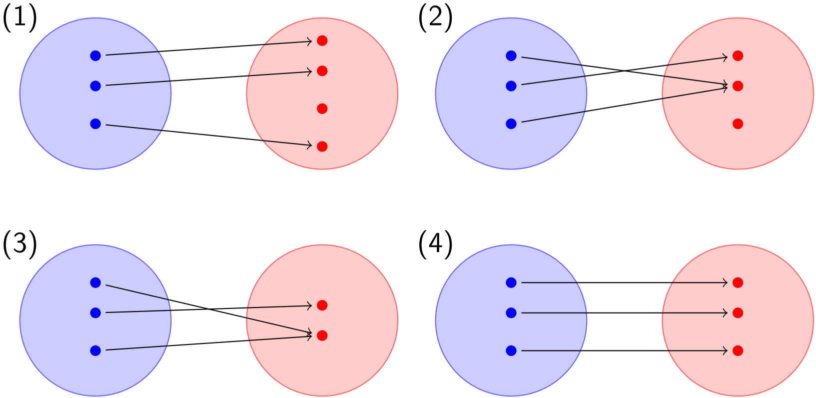
- Eine Funktion $f : D \to W$ heißt **bijektiv**, genau dann, wenn:
  - f injektiv und surjektiv ist.
- Jeder Wert aus dem Wertebereich wird also **höchstens einmal** abgebildet und **mindestens einmal** abbildet.

$\Rightarrow$ Jeder Wert aus dem Wertebereich wird **genau** einmal abgebildet.

Umkehrabbildung

- **Hinweis:** Im Falle, dass $f : A \to B$ bijektiv ist, existiert immer auch die sogenannte **Umkehrabbildung**.
- Der Grund dafür lässt sich recht einfach erklärt:
  - Bijektiv heißt ja: Alles Elemente von B werden mit f erreicht und auch nie doppelt, sondern genau einmal!
  - Wenn wir nun an die Pfeile denken, können wir diese umdrehen und erhalten tatsächlich wieder eine Abbildung (f^{-1})
  - Für f^{-1} gilt dann (da f^{-1} offensichtlich bijektiv ist) wieder die Abbildungseigenschaft:
  - <u>Jedes</u> $b \in B$ wird auf <u>genau ein</u> $a \in A$ abgebildet!
- Ohne die Bijektivität gilt die Abbildungseigenschaft bei dem Umdrehen der Pfeile nicht!

Prüfen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität, Bijektivität



→ (1) ist injektiv und nicht surjektiv, (2) ist nicht injektiv und nicht surjektiv, (3) ist surjektiv aber nicht injektiv, (4) ist injektiv und surjektiv und somit bijektiv.

Bemerkungen zu Umkehrabbildungen

Bemerkung 4.2 Umkehrabbildung

- Für ein Abbildung $f : D \to W$ gilt:

$$f \text{ ist bijektiv} \iff f \text{ besitzt eine Umkehrabbildung} \, (f^{-1} : W \to D)$$

- Hinweis: Das ist natürlich genau dann der Fall, wenn die Gleichung $f(x) = y$ für jedes $y \in W$ **genau eine** Lösung $x \in D$ hat.

Bemerkung 4.3 Graph der Umkehrabbildung

- Sei $f : D \to W$ ein Abbildung. Sind D und W Teilmengen von $\mathbb{R}$, so erhält man den Graphen der Umkehrfunktion f^{-1} von f aus dem Graphen von f, indem man diesen an der Winkelhalbierenden **spiegelt**.

Quellen und Literatur

[1] Akad. Dir. Dr. Martin Scheer, Maximilian Sperber
„Mathematischer Vorkurs“.
TU Dortmund 2021.