

06 - Mengen, Aussagen & Beweise

Vorkurs Mathematik SoSe 2022

Lukas Mürmann

Fakultät Informatik - Lehrstuhl 7 - TU Dortmund

15.03.2022

Mengen, Aussagen & Beweise

1 / 43

2 / 43

Aussagen, Mengen und Beweistechniken

Aussagen und Logik – Motivation

- Aussagen und Logik – Motivation
- Was sind Aussagen?
- Logische Verknüpfungen
- Prädikatenlogik
- Mengen
- Die Idee hinter Beweisen
- Beweistechniken – Motivation
- Beweisformen

Wozu betrachten wir Aussagen und Logik?

- Wir betrachten Probleme und versuchen Lösungen zu finden
- Ein Problem zu formulieren hilft es zu lösen
- Mathematik formalisiert Probleme als Aussagen
- Aussagen können bewiesen oder widerlegt werden
- Man muss logisch argumentieren können

Aussagen und Logik – Motivation

Aussagen und Logik – Motivation

Mathematik als Sprache

Mathematik hat...

Vokabeln: Notation (+, \mathbb{N} , \forall)

Grammatik: Rechenregeln und Konventionen (Klammerung, „Punkt vor Strich“)

... und im Gegensatz zum Deutschunterricht gibt es keinen Spielraum für Interpretationen.

Beispiel

„Alle geraden n “ $\iff \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ ist gerade}\}$

$\iff \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ ist ein Vielfaches von } 2\}$

$\iff \{n \in \mathbb{Z} \mid \text{Es gibt ein } m, \text{ so dass } n = 2m\}$

$\iff \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists m \in \mathbb{Z} : n = 2m\}$

An dieser Stelle sieht man, warum sich alle geraden Zahlen durch 2 teilen lassen.

5 / 43

6 / 43

Was sind Aussagen?

Wahrheitswert einer Aussage

Beispiele für Aussagen

- „Unter meinem Bett befindet sich ein Krokodil.“
- „Ich habe Schnupfen.“
- „Borussia hat am Samstag gespielt.“
- „ $2m$ ist eine gerade Zahl“
- **Aber:** „Diese Aussage ist falsch.“ ist keine Aussage.

Wahrheitswert: Aussagen können entweder *wahr* oder *falsch* sein.

Notation – wahr: Für *wahr* schreiben wir auch w , *true*, t oder 1 .

Notation – falsch: Für *falsch* schreiben wir auch f , *false* oder 0 .

Vorsicht: Manche Dozenten wünschen die Schreibweise 1 und 0 für den Wahrheitswert nicht! Daher lieber w und f verwenden.

7 / 43

8 / 43

Logische Verknüpfungen

Negation: Die Negation \neg verneint eine Aussage.

Beispiel:

$A =$ „ $2m$ ist eine gerade Zahl“ (w),
 $\neg A =$ „ $2m$ ist keine gerade Zahl“ (f).

Konjunktion: Um zwei Aussagen mit einem logischen „und“ zu verbinden, verwenden wir die Konjunktion \wedge .

Beispiel:

$A =$ „ $2m$ ist eine gerade Zahl“ (w),
 $B =$ „ $4n$ ist eine gerade Zahl“ (w),
 $A \wedge B =$ „ $2m$ ist eine gerade Zahl und $4n$ ist eine gerade Zahl“ (w).

Logische Verknüpfungen

Disjunktion: Ein logisches „oder“ wird durch die Disjunktion \vee ausgedrückt.

Vorsicht: Das logische „oder“ ist nicht exklusiv, d.h. es können auch beide Aussagen wahr sein.

Beispiel:

$A =$ „Ich gehe Freitag ins Kino.“ (w),
 $B =$ „Ich werde für Mathe lernen“ (w),
 $A \vee B =$ „Ich gehe Freitag ins Kino oder ich werde für Mathe lernen“ (w).

9 / 43

10 / 43

Logische Verknüpfungen

Implikation: Wenn wir aus einer Aussage A eine Aussage B schlussfolgern schreiben wir: $A \Rightarrow B$.

Beispiel:

$A =$ „Unter meinem Bett ist ein Krokodil.“ (f),
 $B =$ „Schalke ist Deutscher Meister.“ (f),
 $A \Rightarrow B =$ „Wenn unter meinem Bett ein Krokodil ist, dann ist Schalke Deutscher Meister.“ (w)

Logische Verknüpfungen

Äquivalenz: Die Verknüpfung von den Aussagen A und B zu „genau dann A , wenn B “ wird kurz $A \Leftrightarrow B$ geschrieben. In Englischer Literatur schreibt man auch *iff*, was die Kurzform für *if and only if* ist.

Beispiel:

$A =$ „Mein Computer ist nicht defekt.“ (w),
 $B =$ „Ich spiele mit meinen Freunden.“ (w),
 $A \Leftrightarrow B =$ „Wenn mein Computer nicht defekt ist, (dann) spiele ich mit meinen Freunden.“ (w).

11 / 43

12 / 43

Logische Verknüpfungen

Wahrheitstafeln

Verknüpfungen von Aussagen können mit Wahrheitstafeln auf ihren Wahrheitswert überprüft werden:

A	B	$\neg A$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w				
w	f				
f	w				
f	f				

13 / 43

Logische Verknüpfungen

Wahrheitstafeln

Verknüpfungen von Aussagen können mit Wahrheitstafeln auf ihren Wahrheitswert überprüft werden:

A	B	$\neg A$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	f	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	w	w	w	f
f	f	w	f	w	w

Eine Aussage, die für beliebige Wahrheitswerte immer wahr ist, wird als **Tautologie** bezeichnet.

14 / 43

Logische Verknüpfungen

Wahrheitstafeln

Es gibt einige wichtige Eigenschaften von Aussagen, die man mit Wahrheitstafeln beweisen kann:

A	$A \wedge f$	$A \vee f$	$A \wedge w$	$A \vee w$
w				
f				

Folgende Regeln lassen sich an der Wahrheitstafel ablesen:

- $(A \wedge f) \Leftrightarrow$
- $(A \vee f) \Leftrightarrow$
- $(A \wedge w) \Leftrightarrow$
- $(A \vee w) \Leftrightarrow$

15 / 43

Logische Verknüpfungen

Wahrheitstafeln

Es gibt einige wichtige Eigenschaften von Aussagen, die man mit Wahrheitstafeln beweisen kann:

A	$A \wedge f$	$A \vee f$	$A \wedge w$	$A \vee w$
w	f	w	w	w
f	f	f	f	w

Folgende Regeln lassen sich an der Wahrheitstafel ablesen:

- $(A \wedge f) \Leftrightarrow f$
- $(A \vee f) \Leftrightarrow A$
- $(A \wedge w) \Leftrightarrow A$
- $(A \vee w) \Leftrightarrow w$

16 / 43

Logische Verknüpfungen

Logische Verknüpfungen

Wahrheitstafeln – Beispielaufgabe

Eine Schlussregel der Form

Aus A_1 und A_2 folgt A .

kann dadurch als gültig nachgewiesen werden, indem man zeigt, dass die Aussage $A_1 \wedge A_2 \Rightarrow A$ nur den Wahrheitswert w erhalten kann.

Wahrheitstafeln – Beispielaufgabe

Schnittregel: Aus $A \vee B$ und $\neg A$ folgt B .

A	B	$A \vee B$	$\neg A$	$(A \vee B) \wedge (\neg A)$	$(A \vee B) \wedge (\neg A) \Rightarrow B$
w	w				
w	f				
f	w				
f	f				

17 / 43

18 / 43

Logische Verknüpfungen

Logische Verknüpfungen

Wahrheitstafeln – Beispielaufgabe

Schnittregel: Aus $A \vee B$ und $\neg A$ folgt B .

A	B	$A \vee B$	$\neg A$	$(A \vee B) \wedge (\neg A)$	$(A \vee B) \wedge (\neg A) \Rightarrow B$
w	w	w	f	f	w
w	f	w	f	f	w
f	w	w	w	w	w
f	f	f	w	f	w

Wahrheitstafeln – Beispielaufgabe

Kettenschluss: Aus $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow C$ folgt $A \Rightarrow C$.

19 / 43

20 / 43

Logische Verknüpfungen

Wichtige Regeln

Seien A, B und C beliebige Aussagen, dann gilt...

Idempotenz $(A \wedge A) \Leftrightarrow A$
 $(A \vee A) \Leftrightarrow A$

Kommutativität $(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$
 $(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$

Assoziativität $((A \wedge B) \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge (B \wedge C))$
 $((A \vee B) \vee C) \Leftrightarrow (A \vee (B \vee C))$

21 / 43

Logische Verknüpfungen

De Morgan'sche Regel

Wir werden nun versuchen die De Morgan'sche Regel nachzuweisen:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$
w	w	f	f		
w	f	f	w		
f	w	w	f		
f	f	w	w		

23 / 43

Logische Verknüpfungen

Wichtige Regeln

Seien A, B und C beliebige Aussagen, dann gilt...

Distributivität $(A \vee (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$
 $(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$

De Morgan'sche Regel $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
 $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$

22 / 43

Logische Verknüpfungen

De Morgan'sche Regel

Wir werden nun versuchen die De Morgan'sche Regel nachzuweisen:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$
w	w	f	f	f	f
w	f	f	w	f	f
f	w	w	f	f	f
f	f	w	w	w	w

24 / 43

Prädikatenlogik

Prädikatenlogik

Wozu mehr Logik?

- Aussagenlogik reicht nicht aus, um allgemeine Theorien uneingeschränkt darzustellen.
- Gegeben eine Aussage $A(n)$ über alle Zahlen $n \in \mathbb{N}$.
- Wir können keine Wahrheitstafel für **alle** $n \in \mathbb{N}$ aufstellen.
- Neue Methoden erfordern neue Notation.

Quantoren

Allquantor Statt „für alle n “ schreiben wir kurz: $\forall n$.

Existenzquantor Statt „es gibt ein n “ schreiben wir kurz: $\exists n$.

Wenn es nur ein n geben soll (ein n , nicht zwei, nicht drei), für das etwas gilt, dann schreiben wir $\exists! n$ oder $\exists_1 n$.

Wenn es kein n geben soll, für das etwas gilt, dann schreiben wir $\nexists n$.

25 / 43

26 / 43

Aussagen, Logik und Beweistechniken

Mengen – Motivation

- Aussagen und Logik – Motivation
- Was sind Aussagen?
- Logische Verknüpfungen
- Prädikatenlogik
- **Mengen**
- Die Idee hinter Beweisen
- Beweistechniken – Motivation
- Beweisformen

Definition der Menge

Unter einer „Menge“ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die „Elemente“ von M genannt werden) zu einem Ganzen.

27 / 43

28 / 43

Beschreibung von Mengen

Möglichkeiten Mengen zu beschreiben

- Durch Aufzählung der Elemente:
 $M = \{\text{Freitag, Samstag, Sonntag}\}$
- Elemente durch ein Prädikat charakterisierend:

$$M = \{m \mid A(m)\}$$

$$M = \{m \in \mathbb{Z} \mid \exists n \in \mathbb{Z} : m = 2n\}$$

Wir schreiben $a \in M$ („ a ist Element der Menge M “) oder $a \notin M$ („ a ist kein Element der Menge M “).

Wir schreiben $M = \{ \} = \emptyset$ für die leere Menge (ohne Elemente).

29 / 43

Mengenoperationen

Verknüpfungen von Mengen

Vereinigung $A \cup B = \{m \mid m \in A \vee m \in B\}$

Schnitt $A \cap B = \{m \mid m \in A \wedge m \in B\}$

Differenz $A \setminus B = \{m \mid m \in A \wedge m \notin B\}$

Differenz $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

31 / 43

Mengenoperationen

Mengenrelationen

Gleichheit $M = N$, genau dann wenn $m \in M \Leftrightarrow m \in N$ gilt.

Teilmenge $N \subseteq M$, genau dann wenn $m \in N \Rightarrow m \in M$.
 $N \subset M$, genau dann wenn $N \subseteq M \wedge N \neq M$.

Potenzmenge

Sei M eine Menge. Die Potenzmenge ist definiert durch:

$$\mathcal{P}(M) = \{M^* \mid M^* \subseteq M\}$$

Potenzmenge – Beispiel

Sei $M = \{a, b, c\}$. Dann ist die Potenzmenge zu M :

$$\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

30 / 43

Mengengesetze

Seien A, B, C Teilmengen einer gemeinsamen Grundmenge M .
Dann gilt:

Kommutativität $A \cap B = B \cap A$
 $A \cup B = B \cup A$

Assoziativität $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Distributivität $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Komplement $A \cap A^C = \emptyset$
 $A \cup A^C = M$

32 / 43

Mengesetze

Die Idee hinter Beweisen

Seien A, B, C Teilmengen einer gemeinsamen Grundmenge M .
Dann gilt:

Idempotenz $A \cap A = A$

$A \cup A = A$

Doppelkomplement $A^{CC} = A$

De Morgan'sche Gesetze $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

Neutralität $M \cap A = A$

$\emptyset \cup A = A$

Weitere Regeln für Aussagen

Anfangs benutzen alle unsere Beweise Schlussfolgerungen.

Es gibt einige Regeln, die $A \Rightarrow B$ betreffen:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$\neg(A \wedge \neg B)$
w	w	f	f	w		
w	f	f	w	f		
f	w	w	f	w		
f	f	w	w	w		

Die Idee hinter Beweisen

Beweistechniken – Motivation

Weitere Regeln für Aussagen

Anfangs benutzen alle unsere Beweise Schlussfolgerungen.

Es gibt einige Regeln, die $A \Rightarrow B$ betreffen:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$\neg(A \wedge \neg B)$
w	w	f	f	w	w	w
w	f	f	w	f	f	f
f	w	w	f	w	w	w
f	f	w	w	w	w	w

Damit erhalten wir (etwas später) drei äquivalente Beweistechniken.

Wozu brauchen wir Beweise?

- Für Übungszettel und Klausuren (nicht nur in Mathematik)
- Beweise vermitteln ein tieferes Verständnis für Strukturen und Zusammenhänge (kommt noch!)
- Beweise sind der sichere Weg Neues zu entdecken und zu erforschen

Beweisformen – Direkter Beweis

Der direkte Beweis

Direkter Beweis – Starte mit A , folgere B : $A \Rightarrow B$

Beispiel

Satz Wenn m eine gerade Zahl ist, dann ist auch m^2 gerade.

Beweis m gerade $\Rightarrow 2n = m$ für ein $n \in \mathbb{N}$
 $\Rightarrow m^2 = 4n^2 = 2(2n^2)$
 $\Rightarrow m^2$ gerade □

37 / 43

Beweisformen – Kontraposition

Beweis der Kontraposition

Beweis der Kontraposition – Starte mit $\neg B$, folgere $\neg A$: $\neg B \Rightarrow \neg A$

Beispiel

Satz m^2 gerade $\Rightarrow m$ gerade für alle $m \in \mathbb{N}$

Beweis Sei m beliebig aber ungerade, also $m = 2n + 1$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt auch:
 $m^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$
 $\Rightarrow m^2$ ist auch ungerade. □

38 / 43

Beweisformen – Widerspruch

Beweis durch Widerspruch

Beweis durch Widerspruch – Nehme an, dass A und $\neg B$ gilt und führe zum Widerspruch: $\neg(A \wedge \neg B)$

Beispiel

Satz Für jede rationale Zahl $\frac{p}{q}$, p und $q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$, gilt $(\frac{p}{q})^2 \neq 2$. ($\sqrt{2}$ lässt sich nicht als Bruch darstellen.)

Aussagen $A =$ „ $\frac{p}{q}$ ist eine rationale Zahl, p und $q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$ “
 $B =$ „ $(\frac{p}{q})^2 \neq 2$ “

Annahme $p, q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0 \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2$

39 / 43

Beweisformen – Widerspruch

Beispiel

Satz Für jede rationale Zahl $\frac{p}{q}$, p und $q \in \mathbb{N}$, gilt $(\frac{p}{q})^2 \neq 2$

Annahme $p, q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0 \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2$

Beweis Durch Kürzen finden wir $c, d, d \neq 0 \in \mathbb{N}$ teilerfremd, mit $\frac{c}{d} = \frac{p}{q}$
 $\Rightarrow (\frac{p}{q})^2 = (\frac{c}{d})^2 = 2$
 $\Rightarrow c^2 = 2d^2 \Rightarrow c^2$ ist gerade $\Rightarrow c$ ist gerade
 $\Rightarrow c = 2n, n \in \mathbb{N} \Rightarrow 4n^2 = 2d^2$
 $\Rightarrow 2n^2 = d^2 \Rightarrow d^2$ auch gerade $\Rightarrow d$ gerade
 $\Rightarrow c, d$ **nicht** teilerfremd □

40 / 43

Beweisformen – Vollständige Induktion

Beweis durch (vollständige) Induktion

Sei $A(n)$ eine Aussage über die Zahl $n \in \mathbb{N}$ – zu zeigen: $A(n)$ ist wahr für alle n .

Vorgehen

- IA Induktionsanfang: $A(0)$ ist wahr.
- IV Induktionsvoraussetzung:
Sei $A(n)$ wahr für die ersten n Zahlen bewiesen.
- IS Induktionsschritt / Induktionsschluss:
 $A(n) \rightarrow A(n+1)$.

41 / 43

Beispiele und Gegenbeispiele

Wichtiges zu Beispielen

- **Wichtig!** Beispiele beweisen nichts.
- Ein Gegenbeispiel ist **kein** Beweis.
- Mit einem Gegenbeispiel wird eine Aussage nur widerlegt.

43 / 43

Beweisformen – Vollständige Induktion

Beispiel

Satz $A(n) = \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$

IA $A(1) = \sum_{k=1}^1 k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$

IV Es gelte $A(n)$ für die ersten n Zahlen, also
 $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

IS Überprüfe $A(n+1)$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^n k + (n+1) \stackrel{IV}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2} \quad \square$$

42 / 43