# 06 - Mengen, Aussagen & Beweise

## Vorkurs Mathematik SoSe 2022

Lukas Mürmann

Fakultät Informatik - Lehrstuhl 7 - TU Dortmund

15.03.2022

# Mengen, Aussagen & Beweise

# Aussagen, Mengen und Beweistechniken

- Aussagen und Logik – Motivation
- Was sind Aussagen?
- Logische Verknüpfungen
- Prädikatenlogik
- Mengen
- Die Idee hinter Beweisen
- Beweistechniken – Motivation
- Beweisformen

# Aussagen und Logik – Motivation

## Wozu betrachten wir Aussagen und Logik?

- Wir betrachten Probleme und versuchen Lösungen zu finden
- Ein Problem zu formulieren hilft es zu lösen
- Mathematik formalisiert Probleme als Aussagen
- Aussagen können bewiesen oder widerlegt werden
- Man muss logisch argumentieren können

# Aussagen und Logik – Motivation

## Mathematik als Sprache

Mathematik hat...

**Vokabeln:** Notation ($+$, $\mathbb{N}$, $\forall$)

**Grammatik:** Rechenregeln und Konventionen (Klammerung, „Punkt vor Strich“)

...und im Gegensatz zum Deutschunterricht gibt es keinen Spielraum für Interpretationen.

# Aussagen und Logik – Motivation

**Beispiel**

„Alle geraden $n$“ $\iff \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ ist gerade}\}$

$\iff \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ ist ein Vielfaches von } 2\}$

$\iff \{n \in \mathbb{Z} \mid \text{Es gibt ein } m, \text{ so dass } n = 2m\}$

$\iff \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists m \in \mathbb{Z} : n = 2m\}$

An dieser Stelle sieht man, warum sich alle geraden Zahlen durch 2 teilen lassen.

# Was sind Aussagen?

## Beispiele für Aussagen

- „Unter meinem Bett befindet sich ein Krokodil."
- „Ich habe Schnupfen."
- „Borussia hat am Samstag gespielt."
- „$2m$ ist eine gerade Zahl"
- **Aber:** „Diese Aussage ist falsch." ist keine Aussage.

# Wahrheitswert einer Aussage

Wahrheitswert: Aussagen können entweder *wahr* oder *falsch* sein.

Notation – wahr: Für *wahr* schreiben wir auch *w*, *true*, *t* oder *1*.

Notation – falsch: Für *falsch* schreiben wir auch *f*, *false* oder *0*.

**Vorsicht:** Manche Dozenten wünschen die Schreibweise *1* und *0* für den Wahrheitswert nicht! Daher lieber *w* und *f* verwenden.

# Logische Verknüpfungen

**Negation:** Die Negation $\neg$ verneint eine Aussage.
**Beispiel:**
$A =$ „$2m$ ist eine gerade Zahl“ ($w$),
$\neg A =$ “$2m$ ist keine gerade Zahl“ ($f$).

**Konjunktion:** Um zwei Aussagen mit einem logischen „und“ zu verbinden, verwenden wir die Konjunktion $\wedge$.
**Beispiel:**
$A =$ „$2m$ ist eine gerade Zahl“ ($w$),
$B =$ „$4n$ ist eine gerade Zahl“ ($w$),
$A \wedge B =$ „$2m$ ist eine gerade Zahl und $4n$ ist eine gerade Zahl“ ($w$).

# Logische Verknüpfungen

Disjunktion: Ein logisches „oder“ wird durch die Disjunktion $\vee$ ausgedrückt.
**Vorsicht:** Das logische „oder“ ist nicht exklusiv, d.h. es können auch beide Aussagen wahr sein.
**Beispiel:**
$A =$ „Ich gehe Freitag ins Kino.“ $(w)$,
$B =$ „Ich werde für Mathe lernen“ $(w)$,
$A \vee B =$ „Ich gehe Freitag ins Kino oder ich werde für Mathe lernen“ $(w)$.

# Logische Verknüpfungen

Implikation: Wenn wir aus einer Aussage $A$ eine Aussage $B$ schlussfolgern schreiben wir: $A \Rightarrow B$.

**Beispiel:**

$A =$ „Unter meinem Bett ist ein Krokodil.“ $(f)$,

$B =$ „Schalke ist Deutscher Meister.“ $(f)$,

$A \Rightarrow B =$ „Wenn unter meinem Bett ein Krokodil ist, dann ist Schalke Deutscher Meister.“ $(w)$

# Logische Verknüpfungen

Äquivalenz: Die Verknüpfung von den Aussagen $A$ und $B$ zu „genau dann $A$, wenn $B$" wird kurz $A \Leftrightarrow B$ geschrieben. In Englischer Literatur schreibt man auch *iff*, was die Kurzform für *if and only if* ist.

**Beispiel:**

$A =$ „Mein Computer ist nicht defekt." ($w$),
$B =$ „Ich spiele mit meinen Freunden." ($w$),
$A \Leftrightarrow B =$ „Wenn mein Computer nicht defekt ist, (dann) spiele ich mit meinen Freunden." ($w$).

# Logische Verknüpfungen

## Wahrheitstafeln

Verknüpfungen von Aussagen können mit Wahrheitstafeln auf ihren Wahrheitswert überprüft werden:

| $A$ | $B$ | $\neg A$ | $A \vee B$ | $A \Rightarrow B$ | $A \Leftrightarrow B$ |
|---|---|---|---|---|---|
| w | w | | | | |
| w | f | | | | |
| f | w | | | | |
| f | f | | | | |

# Logische Verknüpfungen

## Wahrheitstafeln

Verknüpfungen von Aussagen können mit Wahrheitstafeln auf ihren Wahrheitswert überprüft werden:

| $A$ | $B$ | $\neg A$ | $A \vee B$ | $A \Rightarrow B$ | $A \Leftrightarrow B$ |
|---|---|---|---|---|---|
| w | w | f | w | w | w |
| w | f | f | w | f | f |
| f | w | w | w | w | f |
| f | f | w | f | w | w |

Eine Aussage, die für beliebige Wahrheitswerte immer wahr ist, wird als **Tautologie** bezeichnet.

# Logische Verknüpfungen

## Wahrheitstafeln

Es gibt einige wichtige Eigenschaften von Aussagen, die man mit Wahrheitstafeln beweisen kann:

| $A$ | $A \wedge f$ | $A \vee f$ | $A \wedge w$ | $A \vee w$ |
|---|---|---|---|---|
| w | | | | |
| f | | | | |

Folgende Regeln lassen sich an der Wahrheitstafel ablesen:

$(A \wedge f) \Leftrightarrow$

$(A \vee f) \Leftrightarrow$

$(A \wedge w) \Leftrightarrow$

$(A \vee w) \Leftrightarrow$

# Logische Verknüpfungen

## Wahrheitstafeln

Es gibt einige wichtige Eigenschaften von Aussagen, die man mit Wahrheitstafeln beweisen kann:

| $A$ | $A \wedge f$ | $A \vee f$ | $A \wedge w$ | $A \vee w$ |
|---|---|---|---|---|
| w | f | w | w | w |
| f | f | f | f | w |

Folgende Regeln lassen sich an der Wahrheitstafel ablesen:

$(A \wedge f) \Leftrightarrow f$

$(A \vee f) \Leftrightarrow A$

$(A \wedge w) \Leftrightarrow A$

$(A \vee w) \Leftrightarrow w$

# Logische Verknüpfungen

## Wahrheitstafeln – Beispielaufgabe

Eine Schlussregel der Form

$$\text{Aus } A_1 \text{ und } A_2 \text{ folgt } A.$$

kann dadurch als gültig nachgewiesen werden, indem man zeigt, dass die Aussage $A_1 \wedge A_2 \Rightarrow A$ nur den Wahrheitswert $w$ erhalten kann.

# Logische Verknüpfungen

## Wahrheitstafeln – Beispielaufgabe

Schnittregel: Aus $A \vee B$ und $\neg A$ folgt $B$.

| $A$ | $B$ | $A \vee B$ | $\neg A$ | $(A \vee B) \wedge (\neg A)$ | $(A \vee B) \wedge (\neg A) \Rightarrow B$ |
|---|---|---|---|---|---|
| w | w | | | | |
| w | f | | | | |
| f | w | | | | |
| f | f | | | | |

# Logische Verknüpfungen

## Wahrheitstafeln – Beispielaufgabe

Schnittregel: Aus $A \vee B$ und $\neg A$ folgt $B$.

| $A$ | $B$ | $A \vee B$ | $\neg A$ | $(A \vee B) \wedge (\neg A)$ | $(A \vee B) \wedge (\neg A) \Rightarrow B$ |
|---|---|---|---|---|---|
| w | w | w | f | f | w |
| w | f | w | f | f | w |
| f | w | w | w | w | w |
| f | f | f | w | f | w |

# Logische Verknüpfungen

**Wahrheitstafeln – Beispielaufgabe**

Kettenschluss: Aus $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow C$ folgt $A \Rightarrow C$.

# Logische Verknüpfungen

## Wichtige Regeln

Seien A, B und C beliebige Aussagen, dann gilt...

| | |
|---|---|
| Idempotenz | $(A \wedge A) \Leftrightarrow A$ |
| | $(A \vee A) \Leftrightarrow A$ |
| Kommutativität | $(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$ |
| | $(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$ |
| Assoziativität | $((A \wedge B) \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge (B \wedge C))$ |
| | $((A \vee B) \vee C) \Leftrightarrow (A \vee (B \vee C))$ |

# Logische Verknüpfungen

## Wichtige Regeln

Seien A, B und C beliebige Aussagen, dann gilt...

Distributivität
$$(A \vee (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$$
$$(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$$

De Morgan'sche Regel
$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$$
$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$$

# Logische Verknüpfungen

## De Morgan'sche Regel

Wir werden nun versuchen die De Morgan'sche Regel nachzuweisen:

| $A$ | $B$ | $\neg A$ | $\neg B$ | $\neg(A \vee B)$ | $\neg A \wedge \neg B$ |
|---|---|---|---|---|---|
| w | w | f | f | | |
| w | f | f | w | | |
| f | w | w | f | | |
| f | f | w | w | | |

# Logische Verknüpfungen

## De Morgan'sche Regel

Wir werden nun versuchen die De Morgan'sche Regel nachzuweisen:

| $A$ | $B$ | $\neg A$ | $\neg B$ | $\neg(A \vee B)$ | $\neg A \wedge \neg B$ |
|---|---|---|---|---|---|
| w | w | f | f | f | f |
| w | f | f | w | f | f |
| f | w | w | f | f | f |
| f | f | w | w | w | w |

# Prädikatenlogik

## Wozu mehr Logik?

- Aussagenlogik reicht nicht aus, um allgemeine Theorien uneingeschänkt darzustellen.
- Gegeben eine Aussage $A(n)$ über alle Zahlen $n \in \mathbb{N}$.
- Wir können keine Wahrheitstafel für **alle** $n \in \mathbb{N}$ aufstellen.
- Neue Methoden erfordern neue Notation.

# Prädikatenlogik

## Quantoren

**Allquantor** Statt „für alle $n$“ schreiben wir kurz: $\forall n$.

**Existenzquantor** Statt „es gibt ein $n$“ schreiben wir kurz: $\exists n$.
Wenn es nur ein $n$ geben soll (ein $n$, nicht zwei, nicht drei), für das etwas gilt, dann schreiben wir $\exists!\ n$ oder $\exists_1\ n$.
Wenn es kein $n$ geben soll, für das etwas gilt, dann schreiben wir $\nexists n$.

# Aussagen, Logik und Beweistechniken

- Aussagen und Logik – Motivation
- Was sind Aussagen?
- Logische Verknüpfungen
- Prädikatenlogik
- **Mengen**
- Die Idee hinter Beweisen
- Beweistechniken – Motivation
- Beweisformen

# Mengen – Motivation

**Definition der Menge**

*Unter einer „Menge“ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die „Elemente“ von M genannt werden) zu einem Ganzen.*

# Beschreibung von Mengen

## Möglichkeiten Mengen zu beschreiben

- Durch Aufzählung der Elemente:
  $M = \{\text{Freitag, Samstag, Sonntag}\}$
- Elemente durch ein Prädikat charakterisierend:
  $M = \{m \mid A(m)\}$
  $M = \{m \in \mathbb{Z} \mid \exists n \in \mathbb{Z} : m = 2n\}$

Wir schreiben $a \in M$ („$a$ ist Element der Menge $M$“) oder $a \notin M$ („$a$ ist kein Element der Menge $M$“).
Wir schreiben $M = \{\ \} = \emptyset$ für die leere Menge (ohne Elemente).

# Mengenoperationen

## Mengenrelationen

**Gleichheit** $M = N$, genau dann wenn $m \in M \Leftrightarrow m \in N$ gilt.

**Teilmenge** $N \subseteq M$, genau dann wenn $m \in N \Rightarrow m \in M$.
$N \subset M$, genau dann wenn $N \subseteq M \wedge N \neq M$.

## Potenzmenge

Sei $M$ eine Menge. Die Potenzmenge ist definiert durch:
$\mathcal{P}(M) = \{M^\star \mid M^\star \subseteq M\}$

## Potenzmenge – Beispiel

Sei $M = \{a, b, c\}$. Dann ist die Potenzmenge zu $M$:
$\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

# Mengenoperationen

## Verknüpfungen von Mengen

Vereinigung $A \cup B = \{m \mid m \in A \vee m \in B\}$

Schnitt $A \cap B = \{m \mid m \in A \wedge m \in B\}$

Differenz $A \setminus B = \{m \mid m \in A \wedge m \notin B\}$

Differenz $A \bigtriangleup B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

# Mengengesetze

Seien $A$, $B$, $C$ Teilmengen einer gemeinsamen Grundmenge $M$. Dann gilt:

| | |
|---|---|
| Kommutativität | $A \cap B = B \cap A$ |
| | $A \cup B = B \cup A$ |
| Assoziativität | $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ |
| | $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ |
| Distribitivität | $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ |
| | $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ |
| Komplement | $A \cap A^C = \emptyset$ |
| | $A \cup A^C = M$ |

# Mengengesetze

Seien $A$, $B$, $C$ Teilmengen einer gemeinsamen Grundmenge $M$. Dann gilt:

| | |
|---|---|
| Idempotenz | $A \cap A = A$ |
| | $A \cup A = A$ |
| Doppelkomplement | $A^{CC} = A$ |
| De Morgan'sche Gesetze | $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ |
| | $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ |
| Neutralität | $M \cap A = A$ |
| | $\emptyset \cup A = A$ |

# Die Idee hinter Beweisen

## Weitere Regeln für Aussagen

Anfangs benutzen alle unsere Beweise Schlussfolgerungen.
Es gibt einige Regeln, die $A \Rightarrow B$ betreffen:

| $A$ | $B$ | $\neg A$ | $\neg B$ | $A \Rightarrow B$ | $\neg B \Rightarrow \neg A$ | $\neg(A \wedge \neg B)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| w | w | f | f | w | | |
| w | f | f | w | f | | |
| f | w | w | f | w | | |
| f | f | w | w | w | | |

# Die Idee hinter Beweisen

## Weitere Regeln für Aussagen

Anfangs benutzen alle unsere Beweise Schlussfolgerungen.
Es gibt einige Regeln, die $A \Rightarrow B$ betreffen:

| $A$ | $B$ | $\neg A$ | $\neg B$ | $A \Rightarrow B$ | $\neg B \Rightarrow \neg A$ | $\neg(A \wedge \neg B)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| w | w | f | f | w | w | w |
| w | f | f | w | f | f | f |
| f | w | w | f | w | w | w |
| f | f | w | w | w | w | w |

Damit erhalten wir (etwas später) drei äquivalente Beweistechniken.

# Beweistechniken – Motivation

## Wozu brauchen wir Beweise?

- Für Übungszettel und Klausuren (nicht nur in Mathematik)
- Beweise vermitteln ein tieferes Verständnis für Strukturen und Zusammenhänge (kommt noch!)
- Beweise sind der sichere Weg Neues zu entdecken und zu erforschen

# Beweisformen – Direkter Beweis

## Der direkte Beweis

Direkter Beweis – Starte mit A, folgere B: $A \Rightarrow B$

## Beispiel

**Satz** Wenn $m$ eine gerade Zahl ist, dann ist auch $m^2$ gerade.

**Beweis** $m$ gerade $\Rightarrow 2n = m$ für ein $n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow m^2 = 4n^2 = 2(2n^2)$
$\Rightarrow m^2$ gerade $\square$

# Beweisformen – Kontraposition

## Beweis der Kontraposition

Beweis der Kontraposition – Starte mit $\neg B$, folgere $\neg A$: $\neg B \Rightarrow \neg A$

## Beispiel

**Satz** $m^2$ gerade $\Rightarrow$ $m$ gerade für alle $m \in \mathbb{N}$

**Beweis** Sei $m$ beliebig aber ungerade, also $m = 2n + 1$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt auch:
$m^2 = (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$
$\Rightarrow$ $m^2$ ist auch ungerade. $\square$

# Beweisformen – Widerspruch

## Beweis durch Widerspruch

Beweis durch Widerspruch – Nehme an, dass $A$ und $\neg B$ gilt und führe zum Widerspruch: $\neg(A \wedge \neg B)$

## Beispiel

**Satz** Für jede rationale Zahl $\frac{p}{q}$, $p$ und $q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$ , gilt $(\frac{p}{q})^2 \neq 2$. ($\sqrt{2}$ lässt sich nicht als Bruch darstellen.)

**Aussagen** $A =$ „$\frac{p}{q}$ ist eine rationale Zahl, $p$ und $q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$“
$B =$ „$(\frac{p}{q})^2 \neq 2$“

**Annahme** $p, q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0 \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2$

# Beweisformen – Widerspruch

## Beispiel

**Satz** Für jede rationale Zahl $\frac{p}{q}$, $p$ und $q \in \mathbb{N}$, gilt $(\frac{p}{q})^2 \neq 2$

**Annahme** $p, q \in \mathbb{N},\ q \neq 0 \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2$

**Beweis** Durch Kürzen finden wir $c, d, d \neq 0 \in \mathbb{N}$ teilerfremd, mit $\frac{c}{d} = \frac{p}{q}$

$\Rightarrow (\frac{p}{q})^2 = (\frac{c}{d})^2 = 2$

$\Rightarrow c^2 = 2d^2 \Rightarrow c^2$ ist gerade $\Rightarrow c$ ist gerade

$\Rightarrow c = 2n,\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow 4n^2 = 2d^2$

$\Rightarrow 2n^2 = d^2 \Rightarrow d^2$ auch gerade $\Rightarrow d$ gerade

$\Rightarrow c,\ d$ **nicht** teilerfremd $\square$

# Beweisformen – Vollständige Induktion

## Beweis durch (vollständige) Induktion

Sei $A(n)$ eine Aussage über die Zahl $n \in \mathbb{N}$ – zu zeigen: $A(n)$ ist wahr für alle $n$.

## Vorgehen

- IA Induktionsanfang: $A(0)$ ist wahr.
- IV Induktionsvoraussetzung:
  Sei $A(n)$ wahr für die ersten $n$ Zahlen bewiesen.
- IS Induktionsschritt / Induktionsschluss:
  $A(n) \rightarrow A(n+1)$.

# Beweisformen – Vollständige Induktion

## Beispiel

**Satz** $A(n) = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \ \forall n \in \mathbb{N}$

**IA** $A(1) = \sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$

**IV** Es gelte $A(n)$ für die ersten $n$ Zahlen, also

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

**IS** Überprüfe $A(n+1)$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \overset{IV}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2} \qquad \square$$

# Beispiele und Gegenbeispiele

## Wichtiges zu Beispielen

- **Wichtig!** Beispiele beweisen nichts.
- Ein Gegenbeispiel ist **kein** Beweis.
- Mit einem Gegenbeispiel wird eine Aussage nur widerlegt.