07 - Integrale

Vorkurs Mathematik SoSe 2022

Lukas Mürmann

Fakultät Informatik - Lehrstuhl 7 - TU Dortmund

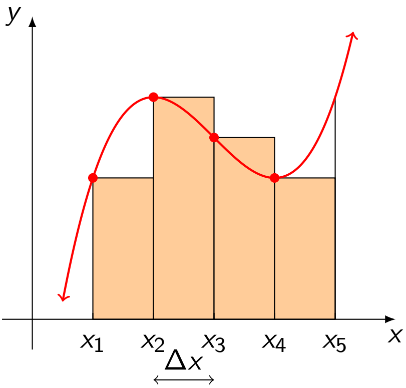
16.03.2022

Integrale

Einleitung

- Heute: Kurze Wiederholung von Integralen
- Fokus: Regeln der Integralrechnung
- Was sind Integrale und wofür werden sie gebraucht?
- Ursprüngliches Problem:
  - Wie bestimme ich den Flächeninhalt zwischen einem Funktionsgraphen und der x-Achse?
  - Einfach für lineare Funktionen (Rechteck + Dreieck)
  - Wie geht man jedoch bei z.B. kurvigen Verläufen vor?
  - Idee: Wie nähern uns mit Rechtecken dem wahren Flächeninhalt immer weiter an.

Riemann Summe



$$F = f(x_1)\cdot(x_2 - x_1) + f(x_2)\cdot(x_3 - x_2) + f(x_3)\cdot(x_4 - x_3) + f(x_4)\cdot\underbrace{(x_4 - x_5)}_{\Delta x}$$

Riemann Summe

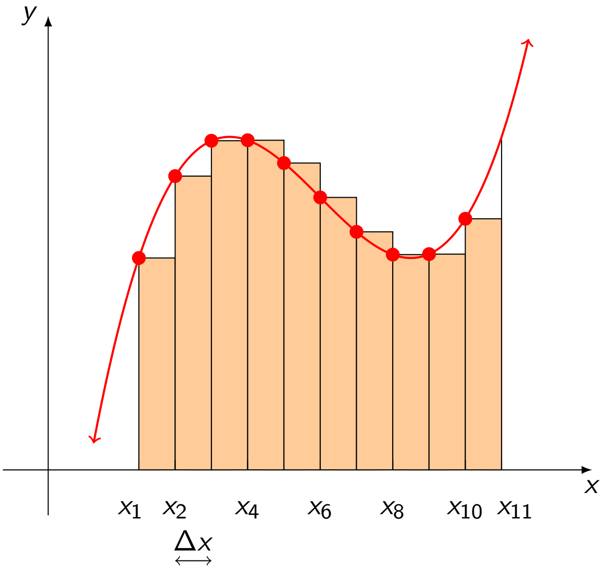
$$F = f(x_1)\cdot(x_2-x_1)+f(x_2)\cdot(x_3-x_2)+f(x_3)\cdot(x_4-x_3)+f(x_4)\cdot(x_4-x_5)$$

- Das können wir auch zusammenfassen:

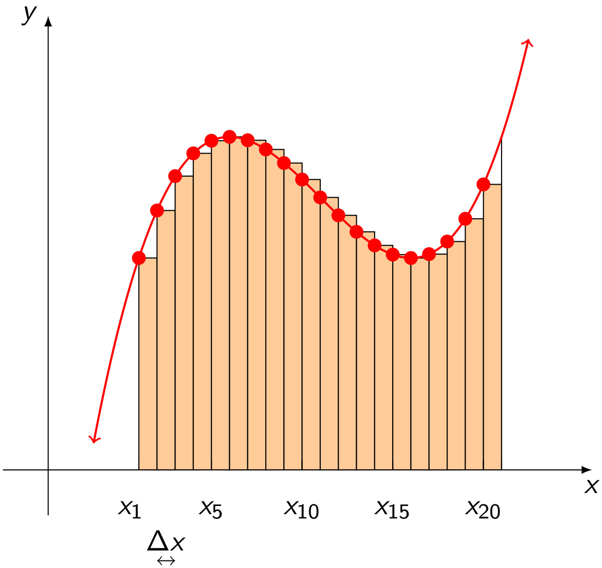
$$S_4 = \sum_{j=1}^{4} f(x_j)\cdot\underbrace{(x_{j+1}-x_j)}_{\Delta x}$$

- Wie erhalten wir nun den genauen Flächeninhalt?
  - Wir verwenden einfach immer mehr Rechtecke!

Riemann Summe



Riemann Summe



Riemann Integral

- Wir sehen also, wenn wir die Anzahl der Rechtecke (n) schrittweise erhöhen, werden wir stets genauer.
- Wir nähern uns also immer weiter dem richtigen Flächeninhalt an.
- Gleichzeitig wird Δx immer kleiner.
- Für eine beliebige Anzahl an Rechtecken ergibt sich:

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} f(x_j) \cdot \Delta x$$

- Wenn wir nun n unendlich erhöhen erhalten wir das sogenannte Integral von x_0 bis x_n der Funktion $f(x)$:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \int_{x_0}^{x_n} f(x)\, dx$$

Riemann Integral

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx$$

- Das Integralzeichen ist also nur ein abgewandeltes Summenzeichen
- Das dx am Ende des Integrals repräsentiert das ursprüngliche Δx, welches nun "unendlich klein" ist.
- Das Ergebnis des Integrals (ungeachtet der Grenzen) ist die sogenannte **Stammfunktion** $F(x)$ von $f(x)$.
- Wenn man diese ableitet erhält man wieder die ursprüngliche Funktion $f(x)$, also $F(x)' = f(x)$.

Integrationsregeln

- Uns interessiert nun, wie wir für eine Funktion $f(x)$ deren Stammfunktion herausfinden können.
- Dazu beschäftigen wir uns im Folgenden mit den Rechenregeln der Integration.
- Starten wir mit folgender Situation:
  - Wir haben eine Funktion $f(x) = x^3$, welche die Ableitung einer unbekannten Funktion sein soll.
  - Wie wird die ursprüngliche Funktion ausgesehen haben?
  - Gesucht wird als die (Stamm-)Funktion F mit $F'(x) = x^3 \qquad (= f(x))$

Stammfunktion von $f(x) = x^3$

Beispiel 7.1

- Wir wissen, was bei der Differentialrechnung passiert:
  - Um nach der Ableitung auf x^3 zu kommen, muss der Exponent vorher um 1 höher gewesen sein.
  - Also war der Exponent 4.
  - $F(x) = x^4$ passt aber nicht, denn dann hätten wir ja als Ableitung $4x^3$.
  - Denn beim Ableiten wird ja der "alte"Exponent als Faktor davor geschrieben.
  - Da bei x^3 kein Faktor vorhanden ist, muss dieser Faktor 4 durch einen "neutralisierenden"Faktor bei $F(x)$ ausgeglichen worden sein.
  - Also: "Alter Faktor"$\cdot$ "neuer Faktor"$= 1$
  - Wir erhalten somit: $F(x) = \frac{1}{4} \cdot x^4$

Stammfunktion von $f(x) = x^3$

Beispiel 7.1 Fortsetzung

- Wir prüfen unser Ergebnis nach:

$$F'(x) = \left(\frac{1}{4} \cdot x^4\right)' = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot x^3 = x^3$$

- Sind wir nun Fertig? Noch nicht ganz! Denn es gibt noch mehr Funktionen mit dieser Eigenschaft z.B.

$$G(x) = \frac{1}{4} \cdot x^4 + 2$$

- Beim Ableiten fallen konstante Summanden ja weg!
- Die korrekte Angabe **aller** Lösungen unserer Aufgabe wäre:

$$F(x) = \frac{1}{4} \cdot x^4 + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Integration von Monomen

Bemerkung 7.1

Für $n \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

- **Hinweis:** Generell gilt beim Integrieren die Vereinbarung, dass wir das $+c$ immer erst ganz am Schluss unserer Rechnung hinschreiben.
- Diese Vereinbarung macht das Rechnen übersichtlicher.
- Eigentlich müsste man das $+c$ immer sofort nach der Auflösung des Integrals ergänzen

Integration bei Summen und Faktoren

- Wie verfahren wir bei Summen?

Bemerkung 7.2 Summenregel

$$\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$$

- Analog zur Differentialrechnung dürfen wir also auch summandenweise integrieren.

- Was passiert mit konstanten Faktoren?

Satz 7.1 Faktoren bei Integralen

Für $a \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int a \cdot f(x)\, dx = a \cdot \int f(x)\, dx$$

Partielle Integration

- Wie können wir Produkte von Funktionen integrieren?

Satz 7.2 Partielle Integration

$$\int f'(x) \cdot g(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)$$

Bemerkung 7.3

- Es ist hilfreich, wenn man hierbei alle benötigten Formel-Elemente einzeln hinschreibt, z.B.

$$\int \cos(x) \cdot x\, dx = ?$$

$$\begin{array}{ll} f' = \cos(x) & f = \sin(x) \\ g = x & g' = 1 \end{array}$$

Partielle Integration

Satz 7.2 Partielle Integration

$$\int f'(x) \cdot g(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)$$

- Bei Aufgaben steht natürlich nie dabei, welche der beiden Funktionen als f' (zu integrieren) und welche als g (abzuleiten) zu wählen ist.
- Sinnvolles Vorgehen:
  - Wähle f' so, dass es beim Integrieren <u>nicht</u> "schwieriger"wird.
  - Wähle g so, dass diese Funktion beim Ableiten vereinfacht wird.
  - Polynome sind meist eine sehr gute Wahl für g.

Integration durch Substitution

- Analog zur Kettenregel der Differentialrechnung funktioniert die **Integration durch Substitution**.
- Mit ihr können wir verkettete Funktionen integrieren.

Satz 7.3 Integration durch Substitution

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int f(t)dt$$

- Von links nach rechts:
  - Die "innere Funktion"$g(x)$ ist ersetzt worden durch t.
  - dx ist zu dt geworden.
  - Der $g'(x)$-Teil ist ganz verschwunden.

Integration durch Substitution

Satz 7.3 Integration durch Substitution

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int f(t)dt$$

- Schritte, die wir bei der Integration durch Substitution durchlaufen:
  - Bestimme die "innere Funktion"$g(x)$ und substituiere $g(x) = t$.
  - Bilder $g'(x)$, setze $g'(x) = \frac{dt}{dx}$ und stelle um nach dx.
  - Alles einsetzen und dann das Integral berechnen.
  - Rücksubstitution

Quellen und Literatur

[1] Akad. Dir. Dr. Martin Scheer, Maximilian Sperber
„Mathematischer Vorkurs“.
TU Dortmund 2021.