

07 - Integrale

Vorkurs Mathematik SoSe 2022

Lukas Mürmann

Fakultät Informatik - Lehrstuhl 7 - TU Dortmund

16.03.2022

Integrale

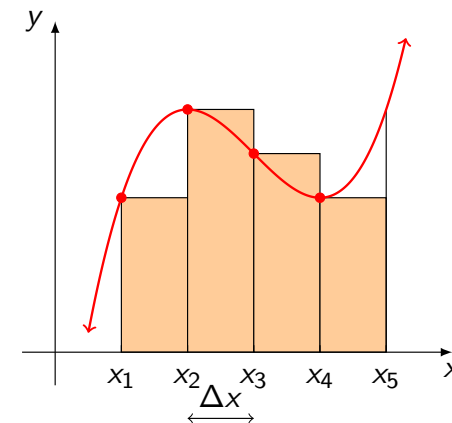
1 / 19

2 / 19

Einleitung

Riemann Summe

- Heute: Kurze Wiederholung von Integralen
- Fokus: Regeln der Integralrechnung
- Was sind Integrale und wofür werden sie gebraucht?
- Ursprüngliches Problem:
 - ▶ Wie bestimme ich den Flächeninhalt zwischen einem Funktionsgraphen und der x-Achse?
 - ▶ Einfach für lineare Funktionen (Rechteck + Dreieck)
 - ▶ Wie geht man jedoch bei z.B. kurvigen Verläufen vor?
 - ▶ Idee: Wie nähern uns mit Rechtecken dem wahren Flächeninhalt immer weiter an.



$$F = f(x_1) \cdot (x_2 - x_1) + f(x_2) \cdot (x_3 - x_2) + f(x_3) \cdot (x_4 - x_3) + f(x_4) \cdot \underbrace{(x_5 - x_4)}_{\Delta x}$$

3 / 19

4 / 19

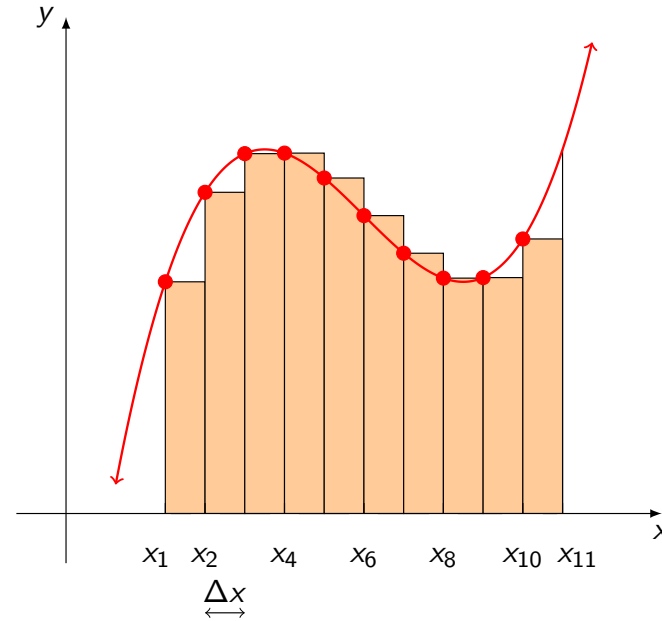
Riemann Summe

$$F = f(x_1) \cdot (x_2 - x_1) + f(x_2) \cdot (x_3 - x_2) + f(x_3) \cdot (x_4 - x_3) + f(x_4) \cdot (x_5 - x_4)$$

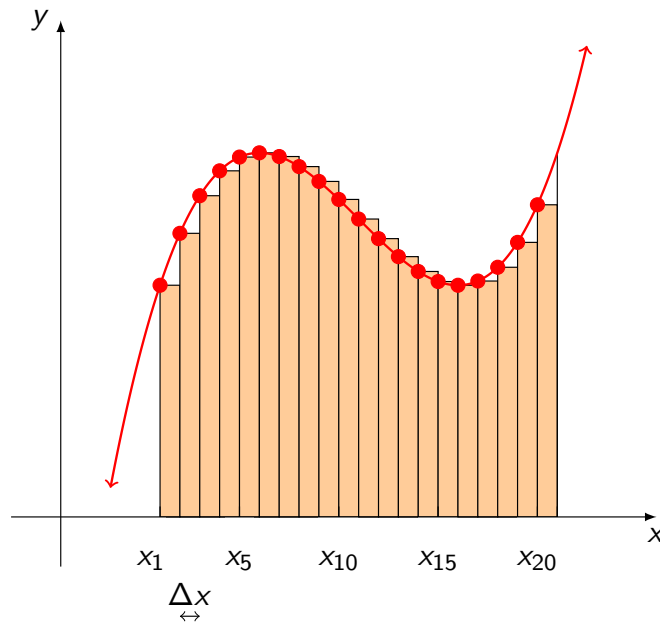
- Das können wir auch zusammenfassen:

$$S_4 = \sum_{j=1}^4 f(x_j) \cdot \underbrace{(x_{j+1} - x_j)}_{\Delta x}$$

- Wie erhalten wir nun den genauen Flächeninhalt?
 - Wir verwenden einfach immer mehr Rechtecke!



Riemann Summe



Riemann Integral

- Wir sehen also, wenn wir die Anzahl der Rechtecke (n) schrittweise erhöhen, werden wir stets genauer.
- Wir nähern uns also immer weiter dem richtigen Flächeninhalt an.
- Gleichzeitig wird Δx immer kleiner.
- Für eine beliebige Anzahl an Rechtecken ergibt sich:

$$S_n = \sum_{j=1}^n f(x_j) \cdot \Delta x$$

- Wenn wir nun n unendlich erhöhen erhalten wir das sogenannte Integral von x_0 bis x_n der Funktion $f(x)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx$$

Riemann Integral

Integrationsregeln

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx$$

- Das Integralzeichen ist also nur ein abgewandeltes Summenzeichen
- Das dx am Ende des Integrals repräsentiert das ursprüngliche Δx , welches nun "unendlich klein" ist.
- Das Ergebnis des Integrals (ungeachtet der Grenzen) ist die sogenannte **Stammfunktion** $F(x)$ von $f(x)$.
- Wenn man diese ableitet erhält man wieder die ursprüngliche Funktion $f(x)$, also $F(x)' = f(x)$.

- Uns interessiert nun, wie wir für eine Funktion $f(x)$ deren Stammfunktion herausfinden können.
- Dazu beschäftigen wir uns im Folgenden mit den Rechenregeln der Integration.
- Starten wir mit folgender Situation:
 - ▶ Wir haben eine Funktion $f(x) = x^3$, welche die Ableitung einer unbekanntes Funktion sein soll.
 - ▶ Wie wird die ursprüngliche Funktion ausgesehen haben?
 - ▶ Gesucht wird als die (Stamm-)Funktion F mit $F'(x) = x^3$ ($= f(x)$)

9 / 19

10 / 19

Stammfunktion von $f(x) = x^3$

Stammfunktion von $f(x) = x^3$

Beispiel 7.1

- Wir wissen, was bei der Differentialrechnung passiert:
 - ▶ Um nach der Ableitung auf x^3 zu kommen, muss der Exponent vorher um 1 höher gewesen sein.
 - ▶ Also war der Exponent 4.
 - ▶ $F(x) = x^4$ passt aber nicht, denn dann hätten wir ja als Ableitung $4x^3$.
 - ▶ Denn beim Ableiten wird ja der "alte" Exponent als Faktor davor geschrieben.
 - ▶ Da bei x^3 kein Faktor vorhanden ist, muss dieser Faktor 4 durch einen "neutralisierenden" Faktor bei $F(x)$ ausgeglichen worden sein.
 - ▶ Also: "Alter Faktor" · "neuer Faktor" = 1
 - ▶ Wir erhalten somit: $F(x) = \frac{1}{4} \cdot x^4$

Beispiel 7.1 Fortsetzung

- Wir prüfen unser Ergebnis nach:

$$F'(x) = \left(\frac{1}{4} \cdot x^4 \right)' = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot x^3 = x^3$$

- Sind wir nun Fertig? Noch nicht ganz! Denn es gibt noch mehr Funktionen mit dieser Eigenschaft z.B.

$$G(x) = \frac{1}{4} \cdot x^4 + 2$$

- Beim Ableiten fallen konstante Summanden ja weg!
- Die korrekte Angabe **aller** Lösungen unserer Aufgabe wäre:

$$F(x) = \frac{1}{4} \cdot x^4 + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

11 / 19

12 / 19

Integration von Monomen

Bemerkung 7.1

Für $n \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

- **Hinweis:** Generell gilt beim Integrieren die Vereinbarung, dass wir das $+c$ immer erst ganz am Schluss unserer Rechnung hinschreiben.
- Diese Vereinbarung macht das Rechnen übersichtlicher.
- Eigentlich müsste man das $+c$ immer sofort nach der Auflösung des Integrals ergänzen

13 / 19

Integration bei Summen und Faktoren

- Wie verfahren wir bei Summen?

Bemerkung 7.2 Summenregel

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

- Analog zur Differentialrechnung dürfen wir also auch summandenweise integrieren.
- Was passiert mit konstanten Faktoren?

Satz 7.1 Faktoren bei Integralen

Für $a \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int a \cdot f(x) dx = a \cdot \int f(x) dx$$

14 / 19

Partielle Integration

- Wie können wir Produkte von Funktionen integrieren?

Satz 7.2 Partielle Integration

$$\int f'(x) \cdot g(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)$$

Bemerkung 7.3

- Es ist hilfreich, wenn man hierbei alle benötigten Formel-Elemente einzeln hinschreibt, z.B.

$$\int \cos(x) \cdot x dx = ?$$

$$\begin{array}{ll} f' = \cos(x) & f = \sin(x) \\ g = x & g' = 1 \end{array}$$

15 / 19

Partielle Integration

Satz 7.2 Partielle Integration

$$\int f'(x) \cdot g(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)$$

- Bei Aufgaben steht natürlich nie dabei, welche der beiden Funktionen als f' (zu integrieren) und welche als g (abzuleiten) zu wählen ist.
- Sinnvolles Vorgehen:
 - ▶ Wähle f' so, dass es beim Integrieren nicht "schwieriger" wird.
 - ▶ Wähle g so, dass diese Funktion beim Ableiten vereinfacht wird.
 - ▶ Polynome sind meist eine sehr gute Wahl für g .

16 / 19

Integration durch Substitution

- Analog zur Kettenregel der Differentialrechnung funktioniert die **Integration durch Substitution**.
- Mit ihr können wir verkettete Funktionen integrieren.

Satz 7.3 Integration durch Substitution

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(t) dt$$

- Von links nach rechts:
 - ▶ Die "innere Funktion" $g(x)$ ist ersetzt worden durch t .
 - ▶ dx ist zu dt geworden.
 - ▶ Der $g'(x)$ -Teil ist ganz verschwunden.

17 / 19

Quellen und Literatur

- [1] Akad. Dir. Dr. Martin Scheer, Maximilian Sperber
„Mathematischer Vorkurs“.
TU Dortmund 2021.

19 / 19

Integration durch Substitution

Satz 7.3 Integration durch Substitution

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(t) dt$$

- Schritte, die wir bei der Integration durch Substitution durchlaufen:
 - ▶ Bestimme die "innere Funktion" $g(x)$ und substituiere $g(x) = t$.
 - ▶ Bildere $g'(x)$, setze $g'(x) = \frac{dt}{dx}$ und stelle um nach dx .
 - ▶ Alles einsetzen und dann das Integral berechnen.
 - ▶ Rücksubstitution

18 / 19