09 - Lineare Gleichungssysteme

Vorkurs Mathematik SoSe 2022

Lukas Mürmann

Fakultät Informatik - Lehrstuhl 7 - TU Dortmund

21.03.2022

Lineare Gleichungssysteme

Einleitung

- Heute:
  - Wiederholung linearer Gleichungssysteme und wie man diese löst.
- Starten wir mit einem Beispiel für ein einfaches lineares Gleichungssystem (LGS).

Einsetzverfahren

Beispiel 9.1

Aufgabe: Finden Sie alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, die die folgenden Gleichungen erfüllen:

$$\text{(I)}\ x_1 - 2x_2 = 3$$

$$\text{(II)}\ 2x_1 + 2x_2 = 6$$

- Das vorliegende (lineare) Gleichungssystem besitzt zwei Gleichungen und zwei Unbekannte.
- Im Gegensatz zu einzelner Gleichung: Die Lösungen x_1 und x_2 müssen **beide Gleichungen gleichzeitig** erfüllen.
- Zur Lösung können wir das **Einsetzverfahren** nutzen.
- Dazu formen wir im Folgenden nach einer Unbekannten um und setzen die entstandene Gleichung in die andere ein.
- Die enstehende Gleichung mit einer Unbekannten können wir durch Umstellen lösen.

Einsetzverfahren

Beispiel 9.1 Fortsetzung

$$\text{(I) } x_1 - 2x_2 = 3$$

$$\text{(II) } 2x_1 + 2x_2 = 6$$

Wir formen nach Gleichung (II) nach x_1 um:

$$\begin{aligned} & 2x_1 + 2x_2 = 6 \mid -2x_2 \\ \Leftrightarrow \quad & 2x_1 = 6 - 2x_2 \mid : 2 \\ \Leftrightarrow \quad & x_1 = 3 - x_2 \end{aligned}$$

Durch einsetzen in (I) ergibt sich:

$$3 - x_2 - 2x_2 = 3 \;\Leftrightarrow\; -3x_2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x_2 = 0$$

Die Lösung $x_2 = 0$ setzen wir nun in unsere vorhin umgestellte Gleichung ein und erhalten $x_1 = 3 - 0 = 3$.

Einsetzverfahren

Beispiel 9.1 Fortsetzung

- Die Zahlen $x_1 = 3$ und $x_2 = 0$ erfüllen also beide Gleichungen gleichzeitig.
- Das heißt sie lösen das Gleichungssystem.
- Wir geben die Lösungsmenge an:

$$\mathbb{L} = \{3; 0\}$$

oder als **Vektor**:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{also } \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

- Da wir **einen** Vektor erhalten, ist die Lösung **eindeutig**.

LGS Lösungsverfahren

- Das **Einsetzverfahren** ist für mehr als 2 Gleichungen bzw. Unbekannte nicht zu gebrauchen.
- Wir schauen uns nun eine effiziente Methode für das Lösen linearer Gleichungssysteme an.
- Dabei werden wir nicht auf alle Feinheiten und Definitionen eingehen können.
- Dazu mehr in MafI 1!

LGS Lösungsverfahren

$$(\mathrm{I})\ x_1 - 2x_2 = 3$$

$$(\mathrm{II})\ 2x_1 + 2x_2 = 6$$

- Wir schreiben unser Beispiel nun in verkürzter Schreibweise.
- Dabei müssen folgende Bedingungen für das LGS gelten:
  - Die Variablen in den Gleichungen des LGS sind geordnet (x_1 steht links von x_2)
  - Rechts vom Gleichheitszeichen steht nur eine Zahl (keine Variable)
- Für unser Beispiel sieht das dann folgendermaßen aus:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

LGS Lösungsverfahren

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

- Das Ganze bringen wir jetzt auf die sogenannte **Zeilen-Stufen-Form**:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \urcorner^{(-2)} \\ \leftarrow\!\lrcorner_{+} \end{array} \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

- Nun schreiben wir die bearbeitete Kurzform wieder als Gleichungen:

$$\text{(I) } x_1 - 2x_2 = 3$$
$$\text{(II) } 0x_1 + 6x_2 = 0$$

- Aus der unteren Gleichung folgt: $x_2 = 0$
- Mit Einsetzen in die obere Gleichung folgt: $x_1 - 2 \cdot 0 = 3 \Leftrightarrow x_1 = 3$ $\checkmark$

Zeilen-Stufen-Form

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 & 9 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Von unten nach oben gesehen dürfen in jeder Zeile der Matrix am Anfang nicht mehr Nullen stehen als in der vorherigen Zeile.

Koeffizientenmatrix

- Durch das Weglassen der Variablen wir das Rechnen im LGS deutlich übersichtlicher.
- Wir wollen uns nun ein paar Definitionen dazu anschauen, welche in MafI 1 ausführlich besprochen werden:

Definition 9.1 Koeffizientenmatrix

- Die verkürzte Schreibweise eines (linearen) Gleichungssystems (**LGS**) nennen wir die **erweiterte Koeffizientenmatrix** $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$.
- Die linke Seite (dort stehen die Koeffizienten des LGS) nennen wir die Matrix **A**.
- Die rechte Seite nennen wir (den **Vektor**) **b**.
- In MafI werdet ihr ein LGS oft auch in der Form $A \cdot x = b$ schreiben.

- Vektoren und Matrizen wiederholen wir in den nächsten Vorlesungen.

Gauß-Verfahren

Das Verfahren, das wir soeben angewendet haben besteht aus zwei Teilen:

1. Wir vereinfachen die erweiterte Koeffizientenmatrix (das LGS in Kurzschreibweise) auf die **Zeilen-Stufen-Form**:
   - Dazu bearbeiten wir die einzelnen **Zeilen** mit **elementaren Zeilenumformungen**
   - Diese sind ähnlich zu Äquivalenz-Umformungen bei Gleichungen.
2. Wir schreiben die vereinfachte Form $(A|b)$ wieder als Gleichungen und lösen von unten nach oben.

$\rightarrow$ Das Verfahren bezeichnet man als den **Gauß-Algorithmus** bzw. das **Gauß-Verfahren**.

Elementare Zeilenumformungen

- Was dürfen wir genau bei der Bearbeitung der Koeffizientenmatrix mit den Zeilen machen?

Bemerkung 9.1 Elementare Zeilenumformungen

Folgende Operationen verändern die Lösungsmenge eines LGS **nicht**:

(E1) Multiplizieren einer Zeile mit einer Zahl $a \neq 0$

(E2) Vertauschen von Zeilen

(E3) Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile

Hinweis: Bei (E3) bleibt die Zeile, die mit einem Faktor k multipliziert und zu einer anderen Zeile addiert wird, stets unverändert.

- Diese 3 Operationen nennt man **elementare Zeilenumformungen**.

Mögliche Lösungen eines LGS

Wie vielen bekannt sein sollte, gibt es drei verschieden Arten von Lösungsmengen für lineare Gleichungssysteme.

1. Das LGS besitzt eine eindeutige Lösung (endliche Lösungsmenge)
   - Dabei besitzt das LGS meist mindestens so viele Gleichungen wie Unbekannte
2. Das LGS besitzt unendlich viele Lösungen (unendliche Lösungsmenge)
   - Dabei besitzt das LGS meist weniger Gleichungen als Unbekannte.
3. Das LGS besitzt keine Lösungen
   - Dabei erhält man während des Gaußverfahrens z.B. $0 = 1$

- Genauer hängt die Lösbarkeit eines LGS mit dem Rang der Koeffizientenmatrix zusammen. Dazu später mehr.
- Wir wollen uns nun zu jedem Fall ein Beispiel ansehen.

LGS Beispiel 9.2

Wir betrachten das folgende LGS:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &= 4 \\ x_1 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Wir schreiben das als Vorbereitung für die Kurzschreibeweise um:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 0x_3 &= 4 \\ x_1 + 0x_2 + 1x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 0x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Jetzt können wir das LGS in verkürzter Schreibweise $(A|b)$ schreiben:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Damit rechnen wir jetzt und lösen das LGS.

LGS Beispiel 9.2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

- Eine 1 ganz oben links ist ein guter Anfang, dazu vertauschen wir die 1. mit der 2. Zeile:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow\!\urcorner \\ \leftarrow\!\lrcorner \\ \end{array} \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ \color{red}{2} & 2 & 0 & 4 \\ \color{red}{2} & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

- Im nächsten Schritt bringen wir die rot markierten Zahlen auf 0.
- Dazu nehmen wir die erste Zeile mal (-2) und addieren sie jeweils zu den anderen beiden.

LGS Beispiel 9.2

Also:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ \color{red}{2} & 2 & 0 & 4 \\ \color{red}{2} & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-2) \quad \cdot(-2) \\ + \\ \quad\quad + \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- Die erste Zeile bleibt dabei unverändert.
- Im nächsten Schritt würden wir gleichermaßen für die zweite Stelle in der zweiten Zeile vorgehen, um darunter Nullen zu erzeugen.
- Jedoch ist dies schon der Fall!
- Damit ist der erste Schritt des Gauß Algorithmus abgeschlossen.
- Die Koeffizientenmatrix befindet sich also in **Zeilen-Stufen-Form**!
- Schauen wir uns kurz die Definition des Rangs einer Matrix an, um diese dann direkt hier anzuwenden.

Definition Rang einer Matrix

Definition 9.2 Rang einer Matrix

- Sei $\mathbf{A}|\mathbf{b}$ eine Koeffizientenmatrix eines LGS in **Zeilen-Stufen-Form**.
- Die Anzahl der von Null verschiedenen Zeilen (auf der linken Seite) bezeichnen wir als den **Rang von A**.
- Die Anzahl der von Null verschiedenen Zeilen insgesamt bezeichnen wir als den **Rang von $\mathbf{A}|\mathbf{b}$**.

- Von Null verschieden bedeutet hier, dass die Zeile nicht ausschließlich Nullen enthält (Nullzeile).

LGS Beispiel 9.2 Fortsetzung

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- Es gilt Rang $A = 2$ und Rang$(A|b) = 2$.
- Wir starten immer ganz unten, da hier eine Nullzeile vorliegt, betrachten wir direkt die zweite Zeile.
- Diese liefert uns: (II): $2x_2 - 2x_3 = 2$
- Man kann nun nach x_2 oder x_3 lösen.
- Wir lösen nach x_2 auf und ersetzen x_3 durch den Parameter $t \in \mathbb{R}$, also $\underline{x_3 :- t}$
- Umgestellt nach x_2 und eingesetzt ergibt sich damit: $x_2 = 1 + x_3 = 1 + t$
- Es gilt also $\underline{x_2 = 1 + t}$

LGS Beispiel 9.2 Fortsetzung

- Aus der obersten Zeile erhalten wir die Gleichung $x_1 + x_3 = 1$
- $x_3 = t$ ist uns schon bekannt, wir setzen ein und erhalten: $x_1 + t = 1$
- Auflösen nach x_1 liefert: $\underline{x_1 = 1 - t}$
- Wie lautet nun die Lösungsmenge?
- Es gilt: $\mathbb{L} = \{1 - t; 1 + t; t \mid t \in \mathbb{R}\}$
- Vektorschreibweise:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - t \\ 1 + t \\ 0 + t \end{pmatrix}, \quad \text{also } \mathbb{L} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \middle| x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

- Das LGS besitzt also unendlich viele Lösungen, welche alle auf einer Gerade liegen.

LGS Beispiel 9.3

- Sehen wir uns noch ein LGS als Koeffizientenmatrix an:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 4 & 12 \\ 2 & 4 & 4 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-3) \quad \cdot(-2) \\ + \\ + \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-2) \\ + \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- Es gilt also Rang $A = 2$ und Rang $(A|b) = 3$
- Schauen wir uns die letzte Zeile als Gleichung an:

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$$

- Es existieren offensichtlich keine Werte $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, für die diese Gleichung gilt.

→ Das LGS ist also **nicht lösbar** und für die Lösungsmenge gilt:

$$\mathbb{L} = \{\} = \emptyset$$

LGS Beispiel 9.4

- Schauen wir uns noch ein letztes Beispiel an:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot 2 \quad \cdot(-1) \\ + \\ + \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ + \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 3 \end{array}\right)$$

- Es gilt also Rang $A = 3$ und Rang $(A|b) = 3$.
- Schauen wir uns die letzte Zeile als Gleichung an:

$$-6x_3 = 3 \Leftrightarrow x_3 = -\frac{1}{2}$$

LGS Beispiel 9.4

- Dann schauen wir uns die zweite Zeile und die entsprechende Gleichung an und setzen $x_3 = -\frac{1}{2}$ ein:

$$-x_2 - 2x_3 = 0 \Leftrightarrow\ - x_2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow\ - x_2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \underline{x_2 = 1}$$

- Zuletzt betrachten wir die erste Zeile und setzen $x_2 = 1$ und $x_3 = -\frac{1}{2}$ ein:

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 - 1 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \underline{x_1 = 2}$$

- Die Lösungsmenge für das LGS ist also eindeutig: $\mathbb{L} = \{2; 1; -\frac{1}{2}\}$

Zusammenhang Rang und Lösbarkeit

- Für das unlösbare LGS war Rang $(A) \neq$ Rang $(A|b)$
- Für alle anderen LGS galt Rang $(A) =$ Rang $(A|b)$
- Es besteht hier ein Zusammenhang:

Satz 9.1 Rang und Lösbarkeit

Für ein lineares Gleichungssystem $A \cdot x = b$ gilt das Lösbarkeitskriterium:

$$A \cdot x = b \,(\text{unser LGS}) \text{ ist lösbar} \iff \text{Rang}\, A = \text{Rang}\,(A|b)$$

- Dazu später mehr in MafI 1...

Quellen und Literatur

[1] Akad. Dir. Dr. Martin Scheer, Maximilian Sperber
„Mathematischer Vorkurs“.
TU Dortmund 2021.