11 - Matrizen

Vorkurs Mathematik SoSe 2022

Lukas Mürmann

Fakultät Informatik - Lehrstuhl 7 - TU Dortmund

23.03.2022

Matrizen

Einleitung

- Heute geht es um **Matrizen**.
- Dieses Thema wird in der Schule meist nur angeschnitten.
- Jedoch sind Matrizen ein wichtiges Werkzeug zur Modellierung von Informationen.
- Daher werden diese wiederkehrend im Informatik-Studium angetroffen:
  - Transformationen von Objekten in einer Szene (Verschiebung, Skalierung, Rotation)
  - Graphentheorie
  - Lösung linearer Gleichungssysteme

Matrix

- Folgende Konstruktion kennt ihr sicherlich alle aus der Schule:

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 & -1 & 8 \\ 2 & 2 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

- Das nennt man eine **Matrix** (Plural: Matrizen).
- Diese besitzt 3 **Zeilen** und 4 **Spalten**.
- Es handelt sich somit um eine **3** $\times$ **4** Matrix (3 "kreuz" 4).
- **Merke:** Man nennt bzw. betrachtet immer zuerst die Zeilen und dann die Spalten einer Matrix.
- Die einzelnen Einträge der Matrix nennt man **Matrixelemente**.

Matrix

- Wir nennen unsere Matrix nun mal A

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -1 & 8 \\ 2 & 2 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

- Entsprechend bezeichnen wir das Element in der **Zeile i** und **Spalte j** mit a_{ij}.
- Zeile vor Spalte!
- Beispiele: $a_{11} = 4, \; a_{32} = 1, \; a_{14} = 8$
- Führen wir Matrizen nun kurz formal ein.

Definition Matrix

Definition 11.1 Matrix

Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und K eine Menge (Körper). Ein Schema der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

mit $a_{ij} \in K$ heißt **Matrix**, genauer $n \times m$-**Matrix** über K.

- n ist dabei die Anzahl der Zeilen und m die Anzahl der Spalten.
- Die Menge aller $n \times m$-Matrizen über K wird mit $K^{n \times m}$ bezeichnet.
- Eine $n \times 1$-Matrix ist nichts anderes als ein n-dimensionaler Spaltenvektor.
- Wenn man mit Matrizen rechnen möchte, wählt man meist $K = \mathbb{R}$.

Rechnen mit Matrizen?

- Jetzt wissen wir also genau was eine Matrix ist und können sie mathematisch bezeichnen.
- Außerdem wissen wir nun, wie wir die einzelnen Elemente einer Matrix referenzieren:
  - Das Element in Zeile i und Spalte j der Matrix A ist a_{ij}
  - Analog dazu ist das Element in Zeile i und Spalte j der Matrix B gleich b_{ij}
- Aber wie rechnen wir jetzt mit Matrizen?

Matrizenaddition

- Wir wissen schon, wie wir Vektoren addieren:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 \\ 2+2 \\ 3+1 \end{pmatrix}$$

- Wir addieren also komponentenweise.
- Da ein Vektor nichts anderes als eine Matrix mit nur einer Spalte ist, können wir das auf Matrizen übertragen.
- Also addieren wir jeweils a_{ij} mit b_{ij}, wenn wir eine Matrix A zu einer Matrix B addieren.

Matrizenaddition

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+1 & 1+0 \\ -2+2 & 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = ?$$

- **Merke:** Wir können nur Matrizen mit gleicher Zeilen- und Spaltenanzahl addieren bzw. subtrahieren.
- Die Subtraktion von Matrizen funktioniert natürlich analog zur Addition.

Skalare Multiplikation

- Die Multiplikation mit einem Skalar $t \in \mathbb{R}$ funktioniert ebenso analog zur Vektorrechnung:

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 4 & 5\cdot 1 \\ 5\cdot 2 & 5\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 5 \\ 10 & 15 \end{pmatrix}$$

- Man kann daher auch Skalare ausklammern:

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 8 & 12 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- Das kann man ausnutzen, um spätere Rechnungen mit der Matrix zu vereinfachen.
- Die Menge der Matrizen über $\mathbb{R}^{n\times m}$ bildet mit den eben behandelten Verknüpfungen übrigens einen Vektorraum.

Vektorraum der Matrizen

Bemerkung 11.1 Vektorraum der Matrizen

Die Menge der Matrizen über $\mathbb{R}^{n\times m}$ bildet mit der Matrizenaddition und Skalarmultiplikation einen $\mathbb{R}$-Vektorraum.
Für $A, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, t \in \mathbb{R}$ werden Addition bzw. Skalarmultiplikation wie folgt definiert:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1m}+b_{1m} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2m}+b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \dots & a_{nm}+b_{nm} \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

Vektorraum der Matrizen

Bemerkung 11.1 Vektorraum der Matrizen (Fortsetzung)

$$\vdots$$

$$t \cdot A = \begin{pmatrix} t\cdot a_{11} & t\cdot a_{12} & \dots & t\cdot a_{1m} \\ t\cdot a_{21} & t\cdot a_{22} & \dots & t\cdot a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t\cdot a_{n1} & t\cdot a_{n2} & \dots & t\cdot a_{nm} \end{pmatrix}$$

- Wir haben nun die folgenden Rechenoperationen formal eingeführt:
  - für $A, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ die Addition: $A + B$
  - für $t \in \mathbb{R}$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ die skalare Multiplikation: $t \cdot A$
- Man kann auch zwei Matrizen multiplizieren (jedoch nur unter bestimmten Bedingungen). Das schauen wir uns jetzt genauer an.

Das Matrizenprodukt

Bemerkung 11.2 Matrizenprodukt

Das **Matrizenprodukt** $A \cdot B$ zweier Matrizen A und B über K ist nur definiert, wenn folgendes gilt:

- Die Spaltenanzahl von A muss der Zeilenanzahl von B entsprechen.

Genauer gilt Folgendes:

$$A \quad \cdot \quad B \quad \rightarrow \quad C$$

$$(n \times \mathbf{p}) \quad \cdot \quad (\mathbf{p} \times m) \quad \rightarrow \quad (n \times m)$$

- Eine 3×4-Matrix malgenommen mit einer 4×2-Matrix ergibt dann also eine 3×2-Matrix.
- Wie genau wir die Werte der Matrizen dabei verrechnen schauen wir uns jetzt an einem Bespiel an.

Beispiel für Matrizenprodukt

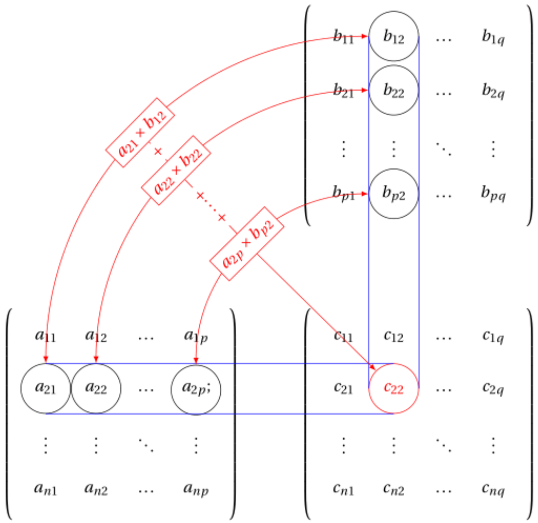
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

- Wir wollen nun A mit C multiplizieren.
- Aufgrund der Zeilen- und Spaltenanzahlen dürfen wir nur $C \cdot A$ rechnen und <u>nicht</u> $A \cdot C$
- Es ist

$$C \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

- Wie genau erhalten wir die Werte der Ergebnismatrix?

Veranschaulichung des Matrizenprodukts



- Bei $A \cdot B = C$ erhalten wir c_{ij} als Skalarprodukt des **j-ten Spaltenvektors** von B mit dem **i-ten Zeilenvektor** von A

Transponieren einer Matrix

- Wir kennen schon die transponierte Schreibweise für einen Vektor:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (1, 2, 3)^T \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}^T = (1, 2, 3)$$

- Der Spaltenvektor wurde beim Transponieren also zu einem Zeilenvektor und umgekehrt.
- Das können wir so auch auf Matrizen übertragen. Nur eben für jeden Zeilen- bzw. Spaltenvektor.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Der i-te Zeilenvektor der ursprünglichen Matrix wird zum i-ten Spaltenvektor der transponierten Matrix.

Quellen und Literatur

[1] Akad. Dir. Dr. Martin Scheer, Maximilian Sperber
„Mathematischer Vorkurs“.
TU Dortmund 2021.