12 - Kombinatorik & Betragsungleichungen

Vorkurs Mathematik SoSe 2022

Lukas Mürmann

Fakultät Informatik - Lehrstuhl 7 - TU Dortmund

24.03.2022

Einleitung

- Heute:
  - Kurze Einführung in die Kombinatorik
  - Betragsgleichungen
  - Betragsungleichungen

Kombinatorik

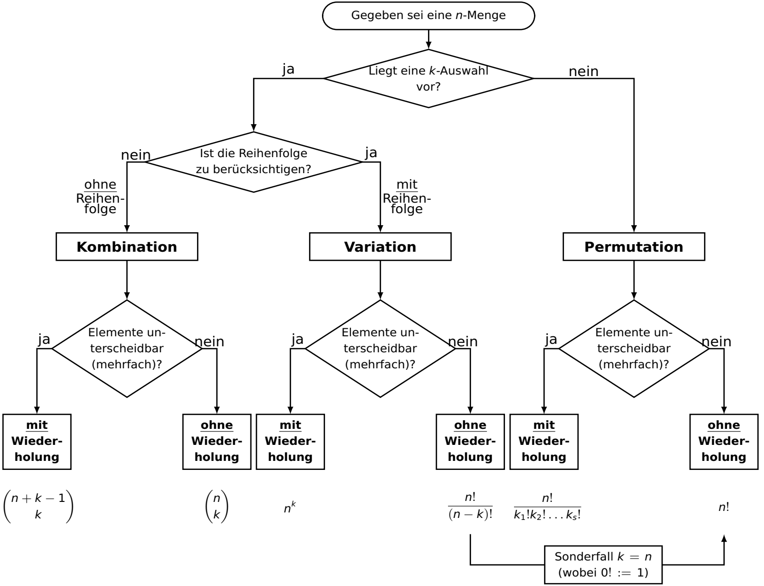
Kombinatorik

- Bei der Kombinatorik handelt es sich um ein Teilgebiet der Mathematik.
- Es behandelt unter anderem Methoden zu Bestimmung der möglichen Anordnungen von Objekten.
- Wir beschäftigen uns heute kurz mit der sogenannten abzählbaren Kombinatorik.
- Dafür müssen wir uns unter anderem mit den Grundbegriffen **Permutation, Variation** und **Kombination** vertraut machen.

Permutation, Variation und Kombination

- Betrachten wir für das Verständnis der Begriffe eine **Grundmenge** von Objekten, die wir anordnen möchten.
- Eine **Permutation** ist die Anordnung aller Elemente der Grundmenge.
- Betrachten wir nun eine Auswahl von Elementen aus der Grundmenge:
  - Spielt die **Reihenfolge** der Elemente der Auswahl eine Rolle, so handelt es sich bei der Auswahl um eine **Variation** (geordnete Stichprobe).
  - Ist die Reihenfolge in der Auswahl bzw. Stichprobe zu vernachlässigen, so handelt es sich bei der Auswahl um eine **Kombination**.

Schaubild der Kombinatorik



Erklärung Schaubild

- Das Schaubild zeigt, wie man für eine Menge mit n Elementen die Anzahl der möglichen Anordnungen bestimmmt.
- Dabei kommt es unter anderem darauf an, ob man alle n Elemente betrachtet oder nur eine Auswahl von k Elementen.
- Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ ist eine mathematische Funktion.
- Diese findet vor allem in der Stochastik, insbesondere in der Kombinatorik Anwendung.
- Es gilt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Beispiel mögliche Anordnungen

Aufgabe: Wie viele dreistellige Zahlen kann man aus den Ziffern 7,8,9 bilden? (Ziffern dürfen mehrfach vorkommen)

- Da die Reihenfolge bei der Bildung der dreistelligen Zahl eine Rolle spielt, haben wir eine Variation mit $n = k = 3$.
- Wir dürfen Ziffern mehrfach benutzen, sodass eine Wiederholung vorliegt.
- Wir nutzen die entsprechende Formel aus dem Schaubild und erhalten: $n^k = 3^3 = 27$
- Antwort: Es lassen sich 27 verschiedene Zahlen bilden.

Betrags(un)gleichungen

Definition Betrag

- Die Betragsfunktion kennt ihr bereits:

Definition 12.1 Betrag

Für $a \in \mathbb{R}$ wird der **Absolutbetrag** von a (auch **Betrag** genannt) wie folgt abschnittsweise definiert (als Symbol schreibt man $|a|$):

$$|a| = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

- der Betrag einer reellen Zahl ist stets positiv oder 0.
- Somit gilt $|a| \in \mathbb{R}_+$ für alle $a \in \mathbb{R}$.
- Anschaulich beschreibt $|a|$ den Abstand von a zu 0.

Beispiele:

$|5| = 5 \qquad |-1| = -(-1) = 1 \qquad |1-4| = |-3| = -(-3) = 3$

Definition Abstand zweier Zahlen

- Aus $|1-4| = |-3| = 3$ erkennen wir, dass mithilfe des Betrags der Abstand von zwei beliebigen reellen Zahlen bestimmt werden kann.

Definition 12.2 Abstand zweier Zahlen durch den Betrag

Für $a, b \in \mathbb{R}$ wird durch

$$|a-b| = \begin{cases} a-b & \text{falls } a-b \geq 0 \\ -(a-b) & \text{falls } a-b < 0 \end{cases}$$

der Abstand zwischen a und b (auf dem Zahlenstrahl bzgl. $\mathbb{R}$) abschnittsweise definiert.

- Mit $b = 0$ erhalten wir wieder die vorherige Definition.

Beispiel:

$|-4+2| = |2-4| \rightarrow$ Gesucht: Abstand von $a = 2$ zu $b = 4$ also $|2-4| = 2$

Abstand bei variablen Zahlen

- Es natürlich einfach $|a - b|$ zu berechnen, wenn a und b bereits bekannt sind.
- Schwieriger wird es, wenn im Betrag variable Zahlen stehen:

Beispiel 12.1 Betragsgleichung

Aufgabe: Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, die $|x + 3| = 1$ erfüllen.

- Die Aufgabe kann man leicht als Abstandsproblem definieren:
$$|x + 3| = |x - (-3)| = 1$$
- Wir suchen also alle $x \in \mathbb{R}$, die zu -3 den Abstand 1 auf dem Zahlenstrahl besitzen.
- Das sind hier offensichtlich die Zahlen -2 und -4
- Wir geben die Lösungsmenge der Betragsgleichung an:
$$\mathbb{L} = \{-2, -4\}$$

Lösung von Betragsgleichungen

- Betragsgleichungen lassen sich nicht immer einfach anschaulich lösen.
- Allgemein löst man den Betrag auf, indem man eine **Fallunterscheidung** durchführt.
- Denn die Betragsfunktion ist ja per **Fallunterscheidung** ($a \geq 0$ bzw. $a < 0$) **definiert**!
- Danach kann man für jeden Fall eine Lösungsmenge bestimmen und fasst diese am Ende zusammen.

Lösung von Betragsgleichungen

Bemerkung 12.1 Auflösen der Betragsfunktion

Eine Fallunterscheidung der Betragsgleichung hat zwei Fälle:

1. Fall: Im Innern des Betrags (zwischen den Betragsstrichen) steht etwas ≥ 0

- Hier kann man die Betragsstriche dann weglassen und die Gleichung wie gewohnt **ohne Beträge** lösen.

2. Fall: Im Innern des Betrags (zwischen den Betragsstrichen) steht etwas < 0

- Hier lässt man den Betrag ebenfalls weg, schreibt dann aber (-1) vor den Ausdruck (negiert diesen) und löst die Gleichung **ohne Beträge**.

- **Hinweis:** Das Innere eines Betrags nennt man auch das **Argument** des Betrags.

Lösung von Betragsgleichungen

Bemerkung 12.2 Überprüfung der Lösungsmengen

Wichtig bei Betragsgleichungen:

- Überprüft **immer**, ob die Lösung eines Falles auch die Bedingung des Falles erfüllt!
- Falls nicht, dann gehört diese Lösung nicht zur Lösungsmenge.

Betragsungleichungen

- Etwas komplizierter wird es noch, wenn man statt mit Gleichungen mit Ungleichungen rechnet.
- Dann erhält man keine Betragsgleichung, sondern eine Betragsungleichung:
- Bsp.: Finde alle $x \in R$, die die folgende Ungleichung erfüllen:

$$2 + |x - 3| < 3$$

- Wie rechnet man noch mal mit Ungleichungen?
- Eigentlich genau so wie mit Gleichungen außer einer Besonderheit:
  - Beim Multiplizieren bzw. Dividieren von beiden Seiten der Ungleichung mit einer **negativen** Zahl dreht sich das Ungleichheitszeichen (egal welches) um.

Regeln Betragsungleichungen

- Um mit Betragsungleichungen rechnen zu können, schauen wir uns im Folgenden ein paar wichtige Regeln dazu an.

Satz 10.1 Regeln für Beträge

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, dann gilt:

1) **Positive Definitheit:**

$$|a| \geq 0$$

$$|a| = 0 \iff a = 0$$

2) **Positive Homogenität:**

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

3) **Dreiecksungleichung:**

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Regeln Betragsungleichungen

Satz 10.1 Regeln für Beträge (Forsetzung)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, dann gilt:

4) Es gilt immer:

$$a \leq |a|$$

5) Zwei wichtige Äquivalenzen:

$$|a| \leq b \iff -b \leq a \leq b$$

$$|a| \geq b \iff a \geq b \text{ oder } a \leq b$$

Beispiele:

$$|x| \leq 3 \iff -3 \leq x \leq 3$$

$$|x| < 5 \iff -5 < x < 5$$

$$|x| > 3 \iff x > 3 \text{ oder } x < -3$$

Quellen und Literatur

Akad. Dir. Dr. Martin Scheer, Maximilian Sperber
„Mathematischer Vorkurs“.
TU Dortmund 2021.