Vorbereitungskurs Mathematik zum Sommersemester 2022

Übungsblatt 2

Übung und Besprechung am 08. März 2022

Aufgabe 2.1

a) Vereinfachen Sie die folgenden Terme soweit wie möglich:

(i) $5^6 \cdot 3^6$

(ii) $(3^4)^2 \cdot (3^2)^{-4}$

(iii) $8^9 : 64^4$

(iv) $2^{111} \cdot 1024^{-11}$

b) Schreiben Sie die folgenden Terme ohne das Wurzelzeichen und vereinfachen Sie anschließend soweit wie möglich:

(i) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{12} \cdot \sqrt{2^3}$

(ii) $\sqrt[3]{3^2} \cdot \sqrt[3]{4^{-2}}$

c) Benutzen Sie u.a. die Potenzregeln, um die folgenden Ausdrücke zu vereinfachen:

(i)
$$\frac{65 \cdot 8^n - 8^n}{8^{n+2}}$$

(ii)
$$\frac{b^{n-1} - 2b^{n-2}}{b^{n-4} - 2b^{n-5}}$$

(iii)
$$\left(\frac{a^2 b}{c d^3}\right)^3 : \left(\frac{a b^2}{c^2 d^2}\right)^4$$

(iv)
$$\frac{\sqrt{20} + \sqrt{8}}{\sqrt{\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}}}$$

Aufgabe 2.2

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke, indem Sie u.a. die binomischen Formeln benutzen:

a) $\dfrac{a-b}{b} \cdot \dfrac{3ab - b^2}{a^2 - 2ab + b^2}$

b) $\dfrac{(x-y)(x^2-1)}{2b^2 - 2a^2} \cdot \dfrac{8a^2 - 8b^2}{x^2 - y^2}$

Aufgabe 2.3

Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen und diskutieren Sie, welche Auswirkungen die Vorfaktoren innerhalb und außerhalb des Arguments haben:

(i) $f_1(x) = \sin(x)$

(ii) $f_2(x) = -2\sin(x)$

(iii) $f_3(x) = \sin(2x)$

(iv) $f_4(x) = \cos(x)$

Aufgabe 2.4

Es gelten die Additionstheoreme:

(i)
$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$$

(ii)
$$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \sin(y)\cos(x)$$

(iii)
$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

(iv)
$$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$$

a) Sie dürfen benutzen:

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Berechnen Sie die angegebenen Ausdrücke mithilfe der Additionstheoreme und den angegebenen Werten:

(i) $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ und $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ (ii) $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ und $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

b)* Zeigen Sie, dass für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\sin(x) + \sin(y) = 2 \cdot \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$